ECONOMETRÍA II:

ECONOMETRÍA DE SERIES TEMPORALES

Requisitos

• **Definición: Serie económica**. Una serie económica (inglés: "economic series") es simplemente una serie de datos económicos $x_0, x_1, \ldots, x_t, \ldots, x_T$.

Ejemplos: Producto Interior Bruto (PIB), inflación, número de desempleados, etc.

• **Definición: Proceso estocástico**. Un proceso estócastico ("stochastic process") es una serie de variables estócasticas $x_0, x_1, \ldots, x_t, \ldots, x_T$.

Ejemplo: Una serie de datos económicos puede ser considerada como una realización de un proceso estocástico.

El logaritmo natural (logaritmo, log, ln):

Matematicamente, el logarítmo natural es la inversa de e^x:

$$\log(e^x) = x.$$

Economicamente, aplicar el logaritmo $\log(\cdot)$ a una serie económica x_t puede (entre otro):

- reducir la heterocedasticidad

- aumentar la heterocedasticidad

- reducir la distancia entre valores extremos y valores no-extremos (a veces esto mejora la potencia del test estadístico)

Algunas propriedades del logaritmo natural:

• Como $x^0 = 1$ para cualquier x, también $e^0 = 1$ y de eso se deduce que $\log(1) = 0$.

• El log no está definido para $x \leq 0$.

• Suponiendo que $x, y > 0$:

$$\begin{aligned} \log(e^x) &= x \\ \log(x \cdot y) &= \log(x) + \log(y) \\ \log(\tfrac{x}{y}) &= \log(x) - \log(y) \\ \log(x^z) &= z \cdot \log(x) \end{aligned}$$

Nota: z puede ser igual o menos de 0.

Logaritmos y tasas de crecimiento:

Si la tasa de crecimiento $\frac{x_t - x_{t-1}}{x_{t-1}}$ está cerca de 0, entonces

$$\log x_t - \log x_{t-1} \approx \frac{x_t - x_{t-1}}{x_{t-1}} \tag{1}$$

Por qué? Porque $\log(1+r) \approx r$ cuando r está cerca de 0:

$$\begin{aligned}
\log x_t - \log x_{t-1} = &\quad \log\left(\tfrac{x_t}{x_{t-1}}\right) \\
= &\quad \log\left(\tfrac{x_t}{x_{t-1}} + 1 - 1\right) \\
= &\quad \log\left(1 + \tfrac{x_t}{x_{t-1}} - \tfrac{x_{t-1}}{x_{t-1}}\right) \\
= &\quad \log\left(1 + \tfrac{x_t - x_{t-1}}{x_{t-1}}\right) \qquad \approx \tfrac{x_t - x_{t-1}}{x_{t-1}}
\end{aligned}$$

cuando $\frac{x_t - x_{t-1}}{x_{t-1}}$ está cerca de 0.

Logaritmos y tasas de crecimiento (cont.):

Ejemplos numéricos:

$x_{t-1} = 100$, $x_t = 105$: $\frac{x_t - x_{t-1}}{x_{t-1}} = 0.05$, $\log x_t - \log x_{t-1} = 0.04879$

$x_{t-1} = 100$, $x_t = 140$: $\frac{x_t - x_{t-1}}{x_{t-1}} = 0.40$, $\log x_t - \log x_{t-1} = 0.33647$

Nota: La diferencia entre 0.05 y 0.04879 es 0.00121, y $0.00121 \times$ 1 million de Euros $=$ 1 210 Euros.

• **Definición: Operador diferencia.** El operador diferencia ("difference operator") $\Delta^i(\cdot)$ de orden i se define así:

$$
\begin{aligned}
\Delta^1 x_t &= x_t - x_{t-1} \\
\Delta^2 x_t &= \Delta(\Delta^1 x_t) = \Delta x_t - \Delta x_{t-1} \\
\Delta^3 x_t &= \Delta(\Delta^2 x_t) = \Delta^2 x_t - \Delta^2 x_{t-1} \\
&\vdots \\
&\text{etc.}
\end{aligned}
$$

Nota: $\Delta^1 x_t$ también se escribe Δx_t.

Ejemplo: Precios P_t

• P_t nivel de precios

• $p_t = \log P_t$

• La inflación se define como $\frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}$. Si no es demasiada alta, entonces $p_t - p_{t-1} = \Delta p_t$ es una buena aproximación.

• Esto significa que $\Delta^2 p_t = \Delta(\Delta p_t)$ es, más o menos, el *cambio* de la tasa de inflación.

• **Definición: Operador retardo.** El operador retardo ("lag operator", "backshift operator") $L^i(\cdot)$ se define así:

$$
\begin{aligned}
L^1 x_t &= x_{t-1} \\
L^2 x_t &= L(Lx_t) = L(x_{t-1}) = x_{t-2} \\
&\vdots \\
L^i x_t &= x_{t-i}
\end{aligned}
$$

Nota: $L^1 x_t$ también se escribe Lx_t.

Algunas propiedades del operador retardo:

x, y variables estocasticas, a, b constantes:

$$
\begin{aligned}
L^i x_t &= L^i x_{t-i} \\
(aL^i + bL^j)x_t &= aL^i x_t + bL^j x_t = ax_{t-i} + bx_{t-j} \\
L^i L^j x_t &= L^{i+j} x_t = x_{t-j-i} \\
L^{-i} x_t &= x_{t+i} \\
L(a) &= a \\
L^0 x_t &= x_t
\end{aligned}
$$

Nota: Si $|a| < 1$, entonces $\frac{1}{1-aL} x_t \approx (1 + aL + a^2 L^2 + \cdots + a^i L^i) x_t$.
Más precisamente, $\frac{1}{1-aL} x_t = \lim_{i \to \infty} (1 + aL + a^2 L^2 + \cdots + a^i L^i) x_t$.

Esperanzas (no condicionales):

Media:	$E(x)$	$=$	$\sum x \cdot p(x)$ (variable discreta) $\int x \cdot f(x)dx$ (variable continua)
Varianza:	$Var(x)$	$=$	$E[(x - E(x))^2]$
Desviación típica:	σ	$=$	$\sqrt{Var(x)}$
Covarianza:	$Cov(x, y)$	$=$	$E[(x - E(x)) \cdot (y - E(y))]$
Correlación:	$Corr(x, y)$	$=$	$\frac{Cov(x,y)}{\sigma_x \sigma_y}$

Nota: $Cov(x, y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad Corr(x, y) = 0$

Algunas propiedades de la esperanza:

x, y variables estocasticas, a, b constantes:

$$
\begin{aligned}
E(ax) &= a \cdot E(x) \\
E(a + bx) &= a + bE(x) \\
E(ax + by) &= aE(x) + bE(y) \\
Var(ax) &= a^2 Var(x) \\
Var(ax + b) &= a^2 Var(x) \\
Var(x + y) &= Var(x) + Var(y) + 2Cov(x, y)
\end{aligned}
$$

Nota: $E(a_1 x_1 + \cdots + a_T x_T) = a_1 E(x_1) + \cdots + a_T E(x_T)$

Esperanzas condicionales:

Media:	$E(x\|y)$	$=$	$\sum x \cdot p(x\|y)$ (variable discreto) $\int x \cdot f(x\|y)dx$ (variable continuo)
Varianza:	$Var(x\|y)$	$=$	$E[(x - E(x\|y))^2\|y]$
Desviación típica:	$\sigma_{x\|y}$	$=$	$\sqrt{Var(x\|y)}$
Covarianza:	$Cov(x, y\|z)$	$=$	$E[(x - E(x\|z)) \cdot (y - E(y\|z))\|z]$
Correlación:	$Corr(x, y\|z)$	$=$	$\frac{Cov(x,y\|z)}{\sigma_{x\|z}\sigma_{y\|z}}$

Nota: $Cov(x, y|z) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad Corr(x, y|z) = 0$