ECONOMETRÍA II:

ECONOMETRÍA DE SERIES TEMPORALES

Estimación e inferencia

Introducción:

• Modelos ARMA: ahora vamos a ver algunos resultados asintóticos de estimación e inferencia para

$\longrightarrow$ la media no condicional de los modelos MA/AR

$\longrightarrow$ las autocorrelaciones no condicionales ρ_k

$\longrightarrow$ contrastar la hipótesis de no autocorrelación ($\rho_k = 0$)

Inferencia para la media no condicional:

• Consideramos un modelo MA(q) con media no-condicional $E(y_t)$ igual a cero:

$$\begin{aligned} y_t &= \epsilon_t + \psi_1 \epsilon_{t-1} + \cdots + \psi_q \epsilon_{t-q} \\ &= \sum_{j=0}^{q} \psi_j L^j \epsilon_t \\ &= \psi(L)\epsilon_t \end{aligned}$$

donde $\psi_0 = 1$ y $\{\epsilon_t\}$ es $WN(0, \sigma^2)$

• Dadas algunas condiciones técnicas (suponemos que las condiciones se cumplen), tenemos

$$\overline{y}_T \xrightarrow{p} E(y_t) \qquad (= 0) \tag{1}$$

donde $\overline{y}_T$ es la media muestral, es decir, $\overline{y}_T = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} y_t$

Inferencia para la media no condicional (cont.):

• En palabras, (1) significa que la media muestral $\bar{y}_T$ es un estimador consistente de $E(y_t)$

• Dadas algunas condiciones técnicas (de nuevo, suponemos que las condiciones se cumplen), tenemos que

$$\sqrt{T} \cdot \bar{y}_T \xrightarrow{d} N(0, \psi(1)^2\sigma^2) \tag{2}$$

donde σ^2 es la varianza del ruido blanco $\{\epsilon_t\}$

• En palabras, (2) significa que la distribución de $\sqrt{T} \cdot \bar{y}_T$ tiende a una distribución Gaussiana con varianza $\psi(1)^2\gamma_0$, cuando el tamaño T de la muestra tiende a ∞

• La utilidad principal de (2) en este curso es para contrastar si la media no condicional $E(y_t)$ es igual a cero o no

Inferencia para la media no condicional (cont.):

- *Ejemplo*. MA(1): $y_t = \epsilon_t + \theta_1 \epsilon_{t-1}$

  $\rightarrow \mu = E(y_t) = 0$

  $\rightarrow \psi(L) = (1 + \theta_1 L)$

  $\rightarrow \sqrt{T} \cdot \bar{y}_T \xrightarrow{d} N[0, \underbrace{(1+\theta_1)^2}_{\psi(1)^2} \sigma^2]$

  $\rightarrow$ Intervalo de confianza al 95%: $\pm 1.96\psi(1)\sigma$. Por ejemplo, con $\sigma^2 = 1$ y $\theta_1 = \frac{1}{2}$: $\pm 1.96 \cdot \frac{3}{2} \approx \pm 3$

Inferencia para la media no condicional (cont.):

- *Ejemplo*. AR(1): $y_t = \phi_1 y_{t-1} + \epsilon_t$ con $|\phi_1| < 1$ y $\epsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$. Aplicando el operador retardo para escribir el modelo como un MA(∞) se obtiene:

$$\begin{aligned} (1 - \phi_1 L) y_t &= \epsilon_t \\ y_t &= \frac{1}{1 - \phi_1 L} \epsilon_t \\ &= (1 + \phi_1 L + \phi_1^2 L^2 + \cdots) \epsilon_t \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \phi_1^j L^j \epsilon_t \\ &= \psi(L) \epsilon_t \end{aligned}$$

- Entonces:

$\rightarrow \mu = E(y_t) = 0$

$\rightarrow \psi(L) = \frac{1}{1-\phi_1 L}$

Inferencia para la media no condicional (cont.):

- *Ejemplo* AR(1) (cont.):

$$\rightarrow \sqrt{T} \cdot \overline{y}_T \xrightarrow{d} N[0, \underbrace{\frac{1}{(1-\phi_1)^2}}_{\psi(1)^2} \sigma^2]$$

$\rightarrow$ Intervalo de confianza al 95%: $\pm 1.96\psi(1)\sigma$. Por ejemplo, con $\phi_1 = \frac{1}{2}$ y $\sigma^2 = 1$: $\pm 1.96 \cdot 2 \approx \pm 4$

Covarianzas y correlaciones:

• Veamos ahora algunos resultados para las covarianzas y correlaciones:

$$\begin{aligned} \hat{\gamma}_k &= \sum_{t=1}^{T-k} (y_t - \bar{y}_T)(y_{t-k} - \bar{y}_T), \qquad 0 \leq k \leq T-1 \\ \hat{\rho}_k &= \frac{\hat{\gamma}_k}{\hat{\gamma}_0} \end{aligned}$$

donde $\bar{y}_T$ es la media muestral

• Dadas algunas condiciones técnicas (de nuevo, suponemos que las condiciones se cumplen), tenemos

$$\sqrt{T}\left[\begin{pmatrix} \hat{\rho}_1 \\ \hat{\rho}_2 \\ \vdots \\ \hat{\rho}_k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \vdots \\ \rho_k \end{pmatrix}\right] \xrightarrow{d} N(\mathbf{0}, \mathbf{W})$$

Covarianzas y correlaciones (cont.):

donde $\mathbf{0}$ y $\mathbf{W}$ son matrices

• La matriz de varianzas y covarianzas $\mathbf{W}$ tiene una expresión muy compleja, y por ello hay que ir caso por caso

• MA(q): $\hat{w}_{ii} = 1 + 2\hat{\rho}_1^2 + 2\hat{\rho}_2^2 + \cdots + 2\hat{\rho}_q^2$ con $i > q$

→ Intervalo de confianza al 95%: $\pm 1.96\sqrt{\frac{\hat{w}_{ii}}{T}}$

→ Intervalo de confianza al 95% para un MA(0): $\pm 1.96\frac{1}{\sqrt{T}}$

→ Intervalo de confianza al 95% para un MA(1): $\pm 1.96\frac{\sqrt{1+2\hat{\rho}_1^2}}{\sqrt{T}}$