ECONOMETRÍA II:

ECONOMETRÍA DE SERIES TEMPORALES

Predicción

Predicción:

• Consideramos la previsión para h periodos

• Objetivo: Predecir y_{t+h} con la esperanza condicional $E(y_{t+h}|y_t, \epsilon_t, y_{t-1}, \epsilon_{t-1}, \ldots)$

• h es el número de periodos hacia el futuro. Por ejemplo, si t denota el año y queremos predecir el valor de una variable dentro de 2 años, entonces $h = 2$

• Notación: $E_t y_{t+h} = E(y_{t+h}|y_t, \epsilon_t, y_{t-1}, \epsilon_{t-1}, \ldots)$

Predicción (cont.):

- Ejemplos $h = 1$:

$$\begin{aligned} \text{MA(1):} \quad E_t y_{t+1} &= E_t(\phi_0 + \epsilon_{t+1} + \theta_1 \epsilon_t) \\ &= E_t \phi_0 + E_t \epsilon_{t+1} + E_t(\theta_1 \epsilon_t) \\ &= \phi_0 + \theta_1 \epsilon_t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{MA(2):} \quad E_t y_{t+1} &= E_t(\phi_0 + \epsilon_{t+1} + \theta_1 \epsilon_t + \theta_2 \epsilon_{t-1}) \\ &= E_t \phi_0 + E_t \epsilon_{t+1} + E_t(\theta_1 \epsilon_t) + E_t(\theta_2 \epsilon_{t-1}) \\ &= \phi_0 + \theta_1 \epsilon_t + \theta_2 \epsilon_{t-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{AR(1):} \quad E_t y_{t+1} &= E_t(\phi_0 + \phi_1 y_t + \epsilon_{t+1}) \\ &= E_t \phi_0 + E_t \phi_1 y_t + E_t \epsilon_{t+1} \\ &= \phi_0 + \phi_1 y_t \end{aligned}$$

Predicción (cont.):

- Ejemplos $h = 2$:

$$\begin{aligned}
\text{MA(1):} \quad E_t y_{t+2} &= E_t(\phi_0 + \epsilon_{t+2} + \theta_1 \epsilon_{t+1}) \\
&= E_t \phi_0 + E_t \epsilon_{t+2} + E_t(\theta_1 \epsilon_{t+1}) \\
&= \phi_0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{MA(2):} \quad E_t y_{t+2} &= E_t(\phi_0 + \epsilon_{t+2} + \theta_1 \epsilon_{t+1} + \theta_2 \epsilon_t) \\
&= E_t \phi_0 + E_t \epsilon_{t+2} + E_t(\theta_1 \epsilon_{t+1}) + E_t(\theta_2 \epsilon_t) \\
&= \phi_0 + \theta_2 \epsilon_t
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{AR(1):} \quad E_t y_{t+2} &= E_t(\phi_0 + \phi_1 y_{t+1} + \epsilon_{t+2}) \\
&= E_t[\phi_0 + \phi_1(\phi_0 + \phi_1 y_t + \epsilon_{t+1}) + \epsilon_{t+2}] \\
&= E_t(\phi_0 + \phi_1 \phi_0 + \phi_1^2 y_t + \phi_1 \epsilon_{t+1} + \epsilon_{t+2} \\
&= \phi_0 + \phi_1 \phi_0 + \phi_1^2 y_t
\end{aligned}$$

Predicción (cont.):

- Ejemplos $h = 2$ (cont.):

$$
\begin{aligned}
\text{ARMA(2,1): } E_t y_{t+2} &= E_t(\phi_0 + \phi_1 y_{t+1} + \phi_2 y_t + \epsilon_{t+2} + \theta_1 \epsilon_{t+1}) \\
&= E_t[\phi_0 + \phi_1(\phi_0 + \phi_1 y_t + \phi_2 y_{t-1} + \epsilon_{t+1} \\
&\quad +\theta_1 \epsilon_t) + \phi_2 y_t + \epsilon_{t+2} + \theta_1 \epsilon_{t+1}] \\
&= E_t(\phi_0 + \phi_1 \phi_0 + \phi_1^2 y_t + \phi_1 \phi_2 y_{t-1} + \phi_1 \epsilon_{t+1} \\
&\quad +\phi_1 \theta_1 \epsilon_t + \phi_2 y_t + \epsilon_{t+2} + \theta_1 \epsilon_{t+1}) \\
&= E_t[\phi_0 + \phi_1 \phi_0 + (\phi_1^2 + \phi_2) y_t + \phi_1 \phi_2 y_{t-1} \\
&\quad +\epsilon_{t+2} + (\phi_1 + \theta_1)\epsilon_{t+1} + \phi_1 \theta_1 \epsilon_t] \\
&= \phi_0 + \phi_1 \phi_0 + (\phi_1^2 + \phi_2) y_t + \phi_1 \phi_2 y_{t-1} \\
&\quad +\phi_1 \theta_1 \epsilon_t
\end{aligned}
$$

Predicción (cont.):

• **Definición: Error de predicción**. El error de predicción $e_t(h)$ se define como

$$e_t(h) = y_{t+h} - E_t y_{t+h}$$

• **Definición: Coste de predicción**. El coste de predicción es una función $g(\cdot)$ aplicada al error de predicción

$$g[e_t(h)] = g(y_{t+h} - E_t y_{t+h})$$

• Ejemplos:

$\rightarrow g(\cdot) = (\cdot)^2$. Es decir, $g[e_t(h)] = (y_{t+h} - E_t y_{t+h})^2$

$\rightarrow g(\cdot) = E_t[(\cdot)^2]$. Es decir, $g[e_t(h)] = Var_t[e_t(h)]$

Predicción (cont.):

- $E_t[e_t(h)] = E_t(y_{t+h} - E_t y_{t+h}) = 0$

- Cuando $h \to \infty$, entonces tenemos que

$$\underbrace{Var_t[e_t(h)]}_{\substack{\text{Varianza condicional} \\ \text{del error de previsión}}} \quad \longrightarrow \quad \underbrace{Var(y_t)}_{\substack{\text{Varianza no condicional} \\ \text{de la serie } \{y_t\}}}$$

- Cuando $h < \infty$, entonces tenemos que

$$Var_t[e_t(h)] = E_t[(y_{t+h} - E_t y_{t+h})^2] = Var_t y_{t+h}$$

Predicción (cont.):

- Intervalo de confianza (95%) cuando $h = 1$

- Es decir, queremos calcular los dos valores $E_t y_{t+h} \pm 1.96\sqrt{Var_t y_{t+h}}$

- Ejemplo AR(1) con $\epsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$:

$$\begin{aligned} E_t y_{t+1} &= \phi_0 + \phi_1 y_t \\ e_t(1) &= y_{t+1} - (\phi_0 + \phi_1 y_t) \\ &= \epsilon_{t+1} \\ Var_t y_{t+1} &= \sigma^2 \end{aligned}$$

$\rightarrow$ Intervalo de confianza: $(\phi_0 + \phi_1 y_t) \pm 1.96\sigma$

Predicción (cont.):

- Intervalo de confianza (95%) cuando $h = 2$
- Ejemplo AR(1) con $\epsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$:

$$
\begin{aligned}
E_t y_{t+2} &= \phi_0 + \phi_0\phi_1 + \phi_1^2 y_t \\
e_t(2) &= y_{t+2} - (\phi_0 + \phi_0\phi_1 + \phi_1^2 y_t) \\
&= \epsilon_{t+2} + \phi_1\epsilon_{t+1} \\
Var_t y_{t+2} &= (1 + \phi_1^2)\sigma^2
\end{aligned}
$$

$\rightarrow$ Intervalo de confianza: $(\phi_0 + \phi_0\phi_1 + \phi_1^2 y_t) \pm 1.96\sqrt{(1 + \phi_1^2)\sigma^2}$

Evaluación de las previsiones:

• Problema: los parámetros son estimados con error $\rightarrow$ significa que el error de previsión tiene dos componentes; $e_t(h)$ y el error de estimación

• Eso significa que—demasiada veces!—la teoría no funciona en la práctica

• Una estrategia para comprobar si la teoría funciona es la evaluación de previsiones fuera de la muestra

• Es decir, utilizar una parte de la muestra (M observaciones) para la estimación y selección de modelo(s), y utilizar la otra parte ($T - M = N$ observaciones) para evaluar las previsiones del (los) modelo(s)

Evaluación de las previsiones (cont.):

• Podemos distinguir entre dos estrategias de evaluación de previsiones

1. Evaluación fuera de la muestra

   $\rightarrow$ Ventaja: test realista del modelo (o modelos)

   $\rightarrow$ Desventaja: menos observaciones para la estimación y selección del modelo o modelos

2. Evaluación dentro de la muestra

   $\rightarrow$ Ventaja: más observaciones para la estimación y selección del modelo o modelos

Evaluación de las previsiones (cont.):

• Vamos a ver 4 métodos de evaluación de previsión fuera de la muestra:

1. Regresiones Mincer-Zarnowitz (1969)
2. Prueba de la F entre dos modelos
3. Prueba de Granger-Newbold (1976)
4. Prueba de Diebold-Mariano (1995)

Evaluación de las previsiones (cont.):

- Regresiones Mincer-Zarnowitz (1969):

$$\begin{aligned}
&\text{Modelo 1:} \quad y_{t+h} = a + b \cdot y_{1,t+h} + u_{t+h} \\
&\text{Modelo 2:} \quad y_{t+h} = a + b \cdot y_{2,t+h} + u_{t+h} \\
&\vdots \\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

donde $\{y_{1,t+h}\}$ son las previsiones del modelo 1, donde $\{y_{2,t+h}\}$ son las previsiones del modelo 2, etc.

- Idealmente, $a = 0$, $b = 1$ y los $\{u_{t+h}\}$ no son autocorrelados

Evaluación de las previsiones (cont.):

- Regresiones Mincer-Zarnowitz (1969) (cont.):

$\rightarrow$ Ventaja: Informativo y simple porque a y b se puede estimar con MCO

$\rightarrow$ Desventaja: Requiere muchas (mayor que 20?) observaciones para que el test sea informativo

- *Nota*: Si los u_{t+h} son heteroscedasticos entonces tenemos que utilizar estimaciones White (1980) de $Var(\hat{a})$ y de $Var(\hat{b})$, y si los u_{t+h} son autocorrelados entonces tenemos que utilizar estimaciones Newey and West (1987) de $Var(\hat{a})$ y de $Var(\hat{b})$

Evaluación de las previsiones (cont.):

- Prueba de la F entre dos modelos:

  → El error cuadrático medio de previsión ("mean squared error prediction"; "MSPE") del modelo 1 es definido como

$$\text{MSPE del modelo 1} = \frac{1}{N_1} \sum_{t=M+1}^{M+N} [e_{1t}(h)]^2$$

  → Comprueba si hay diferencia entre los MSPE entre dos modelos:

$$F = \frac{\text{MSPE del modelo 1}}{\text{MSPE del modelo 2}} \sim F(N, N)$$

Evaluación de las previsiones (cont.):

• Prueba de la F (cont.):

$\rightarrow H_0$: MSPE del modelo 1 = MSPE del modelo 2

$\rightarrow H_1$: MSPE del modelo 1 > MSPE del modelo 2

• *Nota*: Se tienen que cumplir varias condiciones sobre los errores de previsión:

a) Media cero, distribución normal

b) No autocorrelación

c) Para todo t: incorrelación entre e_{1t}, e_{2t}

$\rightarrow$ Estas condiciones no se cumplen frecuentemente!

Evaluación de las previsiones (cont.):

- Prueba de Granger-Newbold (1976):

$\rightarrow x_t = e_{1t} + e_{2t}$

$\rightarrow z_t = e_{1t} - e_{2t}$

- Entonces:

$$
\begin{aligned}
\rho_{x_t z_t} &= E(x_t z_t) \\
&= E(e_{1t}^2 - e_{2t}^2) \\
&\begin{cases} > 0 \text{ si } MSPE_1 > MSPE_2 \\ = 0 \text{ si } MSPE_1 = MSPE_2 \\ < 0 \text{ si } MSPE_1 < MSPE_2 \end{cases}
\end{aligned}
$$

- *Nota*: Se supone que los errores de predicción son Gaussianos con media cero, y que los errores son incorrelados

Evaluación de las previsiones (cont.):

- Prueba de Granger-Newbold (1976) (cont.):

  $\rightarrow H_0 : MSPE_1 = MSPE_2$

  $\rightarrow H_0 : MSPE_1 \neq MSPE_2$

  $\rightarrow$

$$GN = \frac{\hat{\rho}_{x_t z_t}}{\sqrt{(1 - \hat{\rho}^2_{x_t z_t})/(N-1)}} \quad \sim t(N-1)$$

Evaluación de las previsiones (cont.):

- Prueba de Diebold-Mariano (1995):

$\rightarrow$ Relaja las condiciones a), b) y c)

$\rightarrow$ Permite que el coste $g(\cdot)$ no sea cuadrático

$\rightarrow$ La prueba de Diebold-Mariano (DM) consiste en comparar la media

$$\overline{g} = \frac{1}{N} \sum_{t=M+1}^{T} g(e_t)$$

de dos modelos

Evaluación de las previsiones (cont.):

- Prueba de Diebold-Mariano (1995) (cont.):

  $\rightarrow H_0$: $\overline{g}_1 = \overline{g}_2$

  $\rightarrow H_1$: $\overline{g}_1 \neq \overline{g}_2$

$$\rightarrow DM = \frac{\overline{d}}{\sqrt{Var(\overline{d})}} \sim N(0,1)$$

donde $\overline{d} = \overline{g}_1 - \overline{g}_2$

- Si los $d_t = e_{1t} - e_{2t}$ no son autocorrelados, entonces podemos estimar $Var(\overline{d})$ con

$$\hat{\gamma}_0/(N-1)$$

donde $\hat{\gamma}_0$ es la varianza muestral

Evaluación de las previsiones (cont.):

- Prueba de Diebold-Mariano (1995) (cont.)

- Si los d_t son autocorrelados, entonces tenemos que

$$DM = \frac{\overline{d}}{\sqrt{Var(\overline{d})}} \sim t(N-1)$$

donde podemos estimar $Var(\overline{d})$ con

$$(\hat{\gamma}_0 + \hat{\gamma}_1 + \cdots + \hat{\gamma}_q)/(N-1)$$

Combinación de predicciones:

• Consideramos dos predicciones $E_t^A y_{t+h}$ y $E_t^B y_{t+h}$ de y_{t+h}

• Una manera de combinar predicciones es vía una suma ponderada, por ejemplo: $\frac{2}{3}E_t^A y_{t+h} + \frac{1}{3}E_t^B y_{t+h}$

• Muchas veces, esto funciona bastante bien en la práctica(!)

Referencias:

Diebold, F. X. and J. A. Lopez (1995). Modelling Volatility Dynamics. In K. D. Hoover (Ed.), *Macroeconometrics. Developments, Tensions and Prospects*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Mincer, J. and V. Zarnowitz (1969). The Evaluation of Economic Forecasts. In J. Zarnowitz (Ed.), *Economic Forecasts and Expectations*. New York: National Bureau of Economic Research.

Newey, W. and K. West (1987). A Simple Positive Semi-Definite, Heteroskedasticity and Autocorrelation Consistent Covariance Matrix. *Econometrica 55*, 703–708.

White, H. (1980). A Heteroskedasticity-Consistent Covariance Matrix and a Direct Test for Heteroskedasticity. *Econometrica 48*, 817–838.