ECONOMETRÍA II:

ECONOMETRÍA DE SERIES TEMPORALES

Regresión con autocorrelación

Introducción:

- Consideramos la regresión

$$
\begin{aligned}
y_t &= \beta_0 + \beta_1 x_{1t} + \cdots + \beta_k x_{kt} + \cdots + \beta_K x_{Kt} + u_t \\
&= \beta' \mathbf{x}_t + u_t
\end{aligned}
$$

con las hipótesis clásicas:

$$
\begin{aligned}
&i) \quad E(u_t | \mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{t-1}, u_{t-1}, \ldots) = 0 \\
&ii) \quad E(y_t | \mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{t-1}, u_{t-1}, \ldots) = \beta' \mathbf{x}_t \\
&iii) \quad E(u_t^2 | \mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{t-1}, u_{t-1}, \ldots) = \sigma^2 \text{ para todo } t \\
&iv) \quad E(u_t u_{t-k} | \mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{t-1}, u_{t-1}, \ldots) = 0 \text{ para todo } k \neq t
\end{aligned}
$$

- Entonces, tenemos que

$$
\hat{\beta} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}, \qquad Var(\hat{\beta}) = \sigma^2 (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}
$$

Introducción (cont.):

- *iii*) en palabras: una hipótesis de *homocedasticidad*
- *vi*) en palabras: una hipótesis de *no autocorrelación*
- El objetivo del Tema IV es estudiar

$$y_t = \beta' \mathbf{x}_t + u_t$$

con $\{u_t\}$ heterocedásticos y autocorrelados

Heterocedasticidad:

- Recordamos:

$$y_t = \underbrace{\beta_0 + \beta_1 x_{1t} + \cdots + \beta_K x_{Kt}}_{\substack{\text{Explicación} \\ \text{económica}}} + \underbrace{u_t}_{\substack{\text{Error de la} \\ \text{explicación}}}$$

- ¿Qué significa heterocedasticidad en el error? Es decir, ¿qué significa que $E(u_t^2|\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{t-1}, u_{t-1}, \ldots)$ no es constante?

  $\rightarrow$ Que la precisión de la explicación económica no es constante

- Fuente de heterocedasticidad: Cambios estructurales, eventos especiales, etc.

Heterocedasticidad (cont.):

- ¿Cuáles son las consecuencias de la heterocedasticidad?

  $\rightarrow$ Que la estimación de la varianza de los parámetros no es correcta. Es decir, que $\sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$ *no* es una estimación consistente de $Var(\hat{\beta})$

- Recuerda, las $Var(\hat{\beta})$ se utilizan para contrastes sobre $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_K$:

$$t - stat = \left| \frac{\hat{\beta}_k}{\sqrt{Var(\hat{\beta}_k)}} \right|$$

- Dicho de otra manera, utilizar $\sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$ cuando hay heterocedasticidad puede llevar a conclusiones erróneas sobre los β_k

- Sin embargo, todavía tenemos que $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}$ es una estimación consistente de β

Heterocedasticidad (cont.):

• ¿Qué hacemos si los $\{u_t\}$ son heterocedásticos?

$\rightarrow$ "Plan A": mejorar $\beta'\mathbf{x}_t$ (añadir variable(s), borrar variable(s), re-transformar variable(s), etc.)

$\rightarrow$ "Plan B": utilizar estimadores consistentes de $Var(\hat{\beta})$

• White (1980) desarolló un estimador consistente de $Var(\hat{\beta})$ cuando los $\{u_t\}$ son heterocedásticos de una manera desconocida

• Newey y West (1987) propusieron un estimador más general que es consistente cuando hay, posiblemente a la vez, heterocedasticidad y autocorrelación de forma desconocida

• Los estimadores de White (1980) y de Newey y West (1987) permiten calcular estimaciones consistentes de $Var(\hat{\beta})$, y hacer contrastes sobre los $\hat{\beta}$

Heterocedasticidad (cont.):

• En resumen, los estimadores de White y Newey-West substituyen σ^2 en el estimador ordinario $\sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$ con, respectivamente, la matriz $\sigma^2_{t,W}$ en el caso de White, y la matriz $\sigma^2_{t,NW}$ en el caso de Newey-West

• *Nota*: El estimador de White se puede utilizar cuando $\beta'\mathbf{x}_t + u_t$ tiene una estructura ARMA(p,q), o cuando una parte de $\beta'\mathbf{x}_t + u_t$ tiene una estructura ARMA(p,q)

• *Ejemplos*:

$$\begin{aligned} y_t &= \beta_0 + \beta_1 y_{t-1} + u_t \\ y_t &= \beta_0 + \beta_1 y_{t-1} + \epsilon_t + \theta_1 \epsilon_{t-1} \\ y_t &= \beta_0 + \beta_1 y_{t-1} + \beta_2 i_t + \epsilon_t + \theta_1 \epsilon_{t-1} \end{aligned}$$

Heterocedasticidad (cont.):

• En EViews existe la opción de estimar modelos con el estimador de White o el de Newey-West en lugar del estimador ordinario: después de especificar el modelo, hacer clic en "Options", luego en "Heteroskedasticity consistent coefficient covariance", y finalmente eligir el estimador deseado

• En los resultados de EViews, hay una nota que nos indica que estimador ha sido utilizado

Autocorrelación:

- Recordamos:

$$y_t \quad = \quad \underbrace{\beta_0 + \beta_1 x_{1t} + \cdots + \beta_K x_{Kt}}_{\text{Explicación económica}} \quad + \quad \underbrace{u_t}_{\text{Error de la explicación}}$$

- ¿Qué significa autocorrelación en el error? Es decir, ¿qué significa que los $E(u_t u_{t-k}|\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{t-1}, u_{t-1}, \ldots)$ no son iguales a cero?

  $\rightarrow$ La razón más frecuente es que uno o varios de los parámetros β_k no son constantes durante la muestra

- Fuente de autocorrelación: Cambios estructurales, eventos especiales, etc.

Autocorrelación (cont):

- ¿Cuáles son las consecuencias de la autocorrelación?

  $\rightarrow$ Si la fuente de la autocorrelación es que los parámetros no son constantes, y si la falta de constancia es grave, significa que la explicación económica $\beta'\mathbf{x}_t$ no sirve para nada!

  $\rightarrow$ Si la fuente de la autocorrelación no es falta de constancia en los parámetros, o si la falta de constancia no es grave, entonces tenemos las mismas consecuencias que en el caso de heterocedasticidad

- Es decir, utilizando $\sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$ cuando los errores son autocorrelados puede llevar a conclusiones erróneas sobre los β_k

- Además, si la falta de constancia no es grave, entonces tenemos que el estimador $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}$ todavía es una estimación consistente de β—justo como en el caso de heterocedasticidad

Autocorrelación (cont):

- ¿Qué hacemos si los errores $\{u_t\}$ son autocorrelados?

  $\rightarrow$ "Plan A": mejorar $\beta'\mathbf{x}_t$ (añadir variable(s), borrar variable(s), re-transformar variable(s), etc.)

  $\rightarrow$ "Plan B": añadir terminos de tipo MA para neutralizar la autocorrelación

  $\rightarrow$ "Plan C": utilizar estimadores consistentes de $Var(\hat{\beta})$, por ejemplo el estimador de Newey-West

- Recuerda, el estimador Newey-West admite, a la vez, heterocedasticidad y autocorrelación de formas desconocidas

Autocorrelación (cont):

• ¿Cómo detectamos la autocorrelación en los errores $\{u_t\}$?

• Tres pruebas comúnes son:

$\rightarrow$Prueba de Durbin-Watson

$\rightarrow$Prueba de la Q de Ljung-Box

$\rightarrow$Prueba LM de Breusch-Godfrey

• Ya hemos visto la prueba de la Q en detalle, ahora vamos a ver las pruebas de Durbin-Watson y de Breusch-Godfrey en un poco más detalle

Autocorrelación (cont):

• La prueba de Durbin-Watson se usa para hacer contrastes sobre la presencia de autocorrelación de primer orden en los errores $\{u_t\}$

• Es decir, cuando el error u_t se puede representar como $\epsilon_t + \theta_1 \epsilon_{t-1}$ tal que

$$y = \beta' \mathbf{x}_t + \epsilon_t + \theta_1 \epsilon_{t-1}, \quad \epsilon_t \sim WN(0, \sigma^2) \text{ para todo } t$$

• Dicho de otra manera, la prueba de Durbin-Watson permite comprobar si θ_1 es significativo

• El estadístico d de la prueba se aproxima a:

$\rightarrow$ 0 cuando la correlación entre ϵ_t y ϵ_{t-1} se aproxima a 1
$\rightarrow$ 2 cuando la correlación entre ϵ_t y ϵ_{t-1} se aproxima a 0
$\rightarrow$ 4 cuando la correlación entre ϵ_t y ϵ_{t-1} se aproxima a -1

Autocorrelación (cont):

- Ventaja de la prueba Durbin-Watson: simplicidad

- Desventajas de la prueba Durbin-Watson:

  $\longrightarrow$ La distribución del estadístico d depende de las observaciónes $\mathbf{X}$

  $\longrightarrow$ No es una prueba para comprobar si hay autocorrelación de orden mayor que 1

- En efecto, en general los investigadores prefieren la prueba de la Q de Ljung-Box, y pruebas de tipo LM (por ejemplo la de Breusch-Godfrey)

Autocorrelación (cont):

• La prueba LM de Breusch-Godfrey consiste en estimar una regresión auxiliar con MCO y en hacer un contraste sobre los parametros de esta regresión

• Supongamos que ya hemos estimado el modelo

$$y_t = \hat{\beta}'\mathbf{x}_t + \hat{u}_t$$

• La regresión auxiliar para un contraste de autocorrelación de orden p o menor en los residuos tiene la forma

$$\hat{u}_t = \hat{\alpha}'\mathbf{x}_t + \sum_{i=1}^{p} \hat{u}_{t-i} + \hat{v}_t \tag{1}$$

con estadístico $LM = T \cdot R^2$ y, en muestras largas (formalmente cuando $T \to \infty$), $LM \sim \chi^2(p)$

Autocorrelación (cont):

• *Ejemplo*: consideramos el modelo estimado

$$y_t = \phi_0 + \hat{\phi}_1 y_{t-1} + \hat{\beta} i_t + \hat{u}_t \tag{2}$$

donde i_t es una variable explicativa

• Para un contraste de autocorrelación de orden 1 en los residuos, la regresión auxiliar es entonces

$$\hat{u}_t = \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 y_{t-1} + \hat{\alpha}_2 i_t + \hat{u}_{t-1} + \hat{v}_t$$

con $LM = T \cdot R^2$ y $LM \sim \chi^2(1)$

Autocorrelación (cont):

- Ventajas de la prueba LM de Breusch-Godfrey:

  $\rightarrow$ Facil a implementar: dado una regresión necesitamos solamente los regresores, los residuos y el metodo MCO

  $\rightarrow$ General: se puede utilizar para contrastes de autocorrelación de orden $1, 2, \ldots,$ aunque hay terminos AR/MA de orden mayor de $\min\{p, q\}$. Recuerda: la prueba de la Q de Ljung-Box no permite contrastes de orden menor de $\min\{p, q\}$ en un modelo ARMA(p, q)

  $\rightarrow$ Asíntoticamente la distribución del estadístico LM para un test de autocorrelación de orden p o menor es distribuido como un $\chi^2(p)$

- Desventaja: la prueba no se puede usar para contrastes de autocorrelación en los residuos en modelos ARCH

Autocorrelación (cont):

• Hay dos puntos de vista sobre errores autocorrelados en modelos explicativos de tipo

$$y_t = \beta' \mathbf{x}_t + u_t$$

• Punto de vista número 1: la autocorrelación es una consecuencia de que $\beta' \mathbf{x}_t$ no está bien especificado

• Punto de vista número 2: podemos distinguir entre autocorrelación "impura" y "pura"

→ Autocorrelación *impura*: que $\beta' \mathbf{x}_t$ no está "bien" especificado

→ Autocorrelación *pura*: que los errores son autocorrelados aunque $\beta' \mathbf{x}_t$ está "bien" especificado

Autocorrelación (cont):

• Problema con punto de vista número 2: los modelos explicativos siempre son simplificaciones de la realidad, y entonces *siempre* se puede, en principio, mejorar la especificación $\beta'\mathbf{x}_t$

• Consejo práctico: antes de incluir términos MA o utilizar el estimador de Newey-West en modelos explicativos, incluir términos AR en el vector de variables explicativas $\mathbf{x}_t$

• ¿Por qué?

→ Porque los términos AR tienen una interpretación económica; los términos MA raramente tienen una interpretación económica

→ Porque los "efectos" MA se puede representar con estructuras AR

Referencias:

Newey, W. and K. West (1987). A Simple Positive Semi-Definite, Heteroskedasticity and Autocorrelation Consistent Covariance Matrix. *Econometrica 55, 703–708.*

White, H. (1980). A Heteroskedasticity-Consistent Covariance Matrix and a Direct Test for Heteroskedasticity. Econometrica 48, 817–838.