ECONOMETRÍA II:

ECONOMETRÍA DE SERIES TEMPORALES

Modelos econométricos dinámicos uniecuacionales

Introducción:

- Hemos estudiado modelos de tipo:

  $\rightarrow y_t = \phi_0 + \sum_{i=1}^{p} \phi_i y_{t-i} + \sum_{j=0}^{q} \theta_j \epsilon_{t-j}$

  $\rightarrow y_t = \beta' \mathbf{x}_t + u_t$

- Ahora vamos a estudiar

$$y_t = \mu + \sum_{i=1}^{p} \gamma_i y_{t-i} + \sum_{j=0}^{r} \beta_r x_{t-j} + \epsilon_t \qquad \epsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$$

en más detalle

- Este modelo se llama un modelo autoregresivo con retardos distribuidos y se denota ARDL(p, r) (ARDL = "Autoregressive Distributed Lag")

Introducción (cont.):

• Un modelo ARDL(p, r) sin la parte AR(p) se denota DL(r). Es decir, un modelo DL(r) tiene la forma

$$y_t = \mu + \sum_{j=0}^{r} \gamma_j x_{t-j} + \epsilon_t, \qquad \epsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$$

• Existen modelos ARDL(p, r) más generales con términos MA. Es decir, que tienen la forma

$$y_t = \mu + \sum_{i=1}^{p} \gamma_i y_{t-i} + \sum_{j=0}^{r} \beta_r x_{t-j} + \sum_{j=0}^{q} \theta_j \epsilon_{t-j} \qquad \epsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$$

El modelo ARDL(p, r):

• Con el operador retardo el modelo ARDL(p, r), sin constante, se puede escribir como

$$\begin{aligned}(1-\gamma_1 L - \cdots - \gamma_p L^r)y_t &= (\beta_0 + \beta_1 L \cdots + \beta_r L^r)x_t + \epsilon_t \\ C(L)y_t &= B(L)x_t + \epsilon_t\end{aligned}$$

• Un modelo ARDL(p, r) se puede representar como un modelo DL(∞):

$$\begin{aligned}C(L)y_t &= B(L)x_t + \epsilon_t \\ y_t &= \underbrace{\frac{B(L)}{C(L)}}x_t + \underbrace{\frac{1}{C(L)}\epsilon_t} \\ y_t &= D(L)\,x_t + \quad \eta_t \\ y_t &= \sum_{j=0}^{\infty}\delta_j x_{t-j} + \eta_t\end{aligned}$$

El modelo ARDL(p, r) (cont.):

- *Nota*: El error $\{\eta_t\}$ ya no es ruido blanco; ahora está autocorrelado

- Estabilidad de un modelo ARDL(p, r):

  $\rightarrow$ todas las raíces características están dentro del círculo unidad ($\Leftrightarrow$ todas las raíces del polinomo $C(L)$ están fuera del círculo unidad)

- Es decir, que todas las raíces del polinomo

$$1 - \gamma_1 z - \gamma_2 z^2 - \cdots - \gamma_p z^p = 0$$

están fuera del círculo unidad, o que todas sus inversas $\frac{1}{z}$ están dentro del círculo unidad

El modelo ARDL(p, r) (cont.):

• La estabilidad no implica que la suma $\sum_{j=0}^{\infty} \delta_j < \infty$

• Por tanto, el impacto sobre la variable endógena y_t es finito. Es decir, pasado un tiempo y_t:

$\longrightarrow$ se retorna al equilibrio, o

$\longrightarrow$ se tiende hacia un nuevo equilibrio

Multiplicadores, el retardo medio y el retardo mediano:

- **Definición: multiplicador de impacto.** El multiplicador de impacto (multiplicador contemporáneo), denotado m_0, representa el cambio en y_t en el periodo t ante una variación unitaria de la variable exógena x_t en el periodo t

- Es decir

$$\begin{aligned} m_0 &= \frac{\partial y_t}{\partial x_t} \\ &= \delta_0 \end{aligned}$$

- **Definición: multiplicador de retardo j.** El multiplicador de retardo j, denotado m_j, representa el cambio en y_t en el periodo t ante una variación unitaria de la variable exógena x_{t-j} en el periodo $t-j$

Multiplicadores, etc. (cont.):

- Es decir

$$\begin{aligned} m_j &= \frac{\partial y_t}{\partial x_{t-j}} \\ &= \delta_j \end{aligned}$$

- **Definición: multiplicador total.** El multiplicador total, denotado m_T, es la suma de todos los multiplicadores $m_0, m_1, m_2, \ldots$

- Es decir

$$\begin{aligned} m_T &= \sum_{j=0}^{\infty} m_j \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \delta_j \end{aligned}$$

Multiplicadores, etc. (cont.):

• **Definición: retardo medio.** El retardo medio se define como la media, ponderada por el retardo, de todos los coeficientes del polinomio $D(L)$:

$$\text{Retardo medio: } \overline{m} = \frac{\sum_{j=0}^{\infty} j\delta_j}{\sum_{j=0}^{\infty} \delta_j}$$

• Idea intuitiva del retardo medio: informa si el impacto de x_t en y_t está concentrado/diluido en el tiempo

Multiplicadores, etc. (cont.):

• **Definición: retardo mediano.** El retardo mediano se define como el instante en el que se alcanza el 50% del impacto total que se produce en y_t debido a una variación en x_t:

$$\text{Retardo mediano: } \dot{q} = \min\left\{ q \left| \frac{\sum_{j=0}^{q} \delta_j}{\sum_{j=0}^{\infty} \delta_j} \geq 0.5 \right. \right\}$$

• En palabras: el valor mínimo de q tal que $\frac{\sum_{j=0}^{q} \delta_j}{\sum_{j=0}^{\infty} \delta_j} \geq 0.5$

• Interpretación económica del retardo medio: informa si el impacto de x_t en y_t está concentrado/diluido en el tiempo

Multiplicadores, etc. (cont.):

- *Ejemplo*. Consideramos el modelo ARDL(1,0) siguiente:

$$y_t = 0.8y_{t-1} + 3x_t + \epsilon_t \tag{1}$$

$\rightarrow$ Los polinomios $C(L)$ y $B(L)$ son:

$$\begin{aligned} C(L) &= 1 - 0.8L \\ B(L) &= 3 \end{aligned}$$

$\rightarrow$ Raíz característica de (1): $\frac{1}{z} = 0.8$

$\rightarrow$ Raíz característica del polinomo $1 - 0.8z$: $z = \frac{1}{0.8}$

- Conclusión: como $\left|\frac{1}{z}\right| < 1$ ($\Leftrightarrow |z| > 1$), entonces (1) es estable

Multiplicadores, etc. (cont.):

- *Ejemplo* (cont.). El polinomio $D(L)$ se obtiene dividiendo $B(L)$ por $C(L)$:

$$
\begin{aligned}
D(L) &= \frac{B(L)}{C(L)} = \frac{3}{1-0.8L} = 3(1+0.8L+0.8^2L^2+\cdots) \\
&= 3+2.4L+1.92L^2+1.536L^3+\cdots \\
&= \delta_0+\delta_1 L+\delta_2 L^2+\delta_3 L^3+\cdots
\end{aligned}
$$

- Entonces:

$$
\begin{aligned}
m_0 &= \delta_0 &= 3 \\
m_1 &= \delta_1 &= 2.4 \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

etc.

Multiplicadores, etc. (cont.):

- *Ejemplo* (cont.):

$$\longrightarrow \text{Multiplicador total:} \quad m_T = \sum_{j=0}^{\infty} m_j = \sum_{j=0}^{\infty} \delta_j = \frac{3}{1-0.8} = 15$$

$$\longrightarrow \text{Retardo medio:} \quad \overline{m} = \frac{\sum_{j=0}^{\infty} j\delta_j}{\sum_{j=0}^{\infty} \delta_j} = \frac{B'(1)}{B(1)} - \frac{C'(1)}{C(1)} = \frac{0}{3} - \frac{-0.8}{1-0.8} = 4$$

- Para calcular el retardo mediano, conviene definir el multiplicador cumulativo:

$$m^q = \sum_{j=0}^{q} \delta_j$$

Multiplicadores, etc. (cont.):

- *Ejemplo* (cont.):

	$q=0$	$q=1$	$q=2$	$q=3$
$\frac{m^q}{m_T}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{5.4}{15}$	$\frac{7.32}{15}$	$\frac{8.856}{15}$

$$\rightarrow \text{Retardo mediano: } \dot{q} = \min\left\{ q \left| \frac{\sum_{j=0}^{q}\delta_j}{\sum_{j=0}^{\infty}\delta_j} \geq 0.5 \right.\right\} = 3$$

Ejemplos de modelos economicos:

• Modelos económicos: existen varios modelos económicos que se pueden representar como modelos de regresión dinámica

• Ejemplos:

$\longrightarrow$ modelos con expectativas adaptivas

$\longrightarrow$ modelos de ajuste parcial

$\longrightarrow$ modelos de optimización dinámica

Ejemplos de modelos economicos (cont.):

- Ejemplo de expectativas dinámicas: consideramos

$$y_t = \alpha + \beta x_t^{e,t+1} + \epsilon_t$$

con

$$x_t^{e,t+1} = \lambda x_{t-1}^{e,t} + (1-\lambda)x_t, \qquad \lambda \in [0,1]$$

donde

$\longrightarrow$ $x_t^{e,t+1}$ es la "nueva" expectativa

$\longrightarrow$ $x_{t-1}^{e,t}$ es la expectativa anterior

$\longrightarrow$ x_t es el valor realizado

Ejemplos de modelos economicos (cont.):

- Ejemplo de expectativas dinámicas (cont.):

$$
\begin{aligned}
x_t^{e,t+1} &= \lambda x_{t-1}^{e,t} + (1-\lambda)x_t && \Leftrightarrow \\
(1-\lambda L)x_t^{e,t+1} &= (1-\lambda)x_t && \Leftrightarrow \\
x_t^{e,t+1} &= (1-\lambda)\frac{1}{(1-\lambda L)}x_t && \Leftrightarrow \\
x_t^{e,t+1} &= (1-\lambda)(x_t + \lambda x_{t-1} + \lambda^2 x_{t-2} + \cdots)
\end{aligned}
$$

- *Nota*:

$\rightarrow \lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad x_t^{e,t+1} = x_t$ (corrección inmediata)

Ejemplos de modelos economicos (cont.):

- Ejemplo de expectativas dinámicas (cont.):

$$\begin{aligned}
y_t &= \alpha + \beta x_t^{e,t+1} + \epsilon_t && \Leftrightarrow \\
y_t &= \alpha + \beta \frac{1-\lambda}{1-\lambda L} x_t + \epsilon_t && \Leftrightarrow \\
(1-\lambda L) y_t &= (1-\lambda L)\alpha + \beta(1-\lambda) x_t + (1-\lambda L)\epsilon_t && \Leftrightarrow \\
y_t &= \alpha^* + \lambda y_{t-1} + \beta^* x_t + \epsilon_t^*
\end{aligned}$$

- Es decir, un $\mathrm{ARDL}(1,0)$ donde

$\rightarrow \alpha* = (1-\lambda)\alpha$

$\rightarrow \beta* = \beta(1-\lambda)$

$\rightarrow \epsilon_t^* = \epsilon_t - \lambda\epsilon_{t-1} = \mathrm{MA}(1)$

Ejemplos de modelos economicos (cont.):

- Ejemplo de un modelo de ajuste parcial:

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \lambda(y_t^* - y_{t-1}) + \epsilon_t, \qquad \epsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$$

donde $y_t^* = \beta' \mathbf{x}_t$. Es decir, hay un valor "ancla", y_t^*, que depende de x_t

- Entonces:

$$\begin{aligned} y_t &= \phi_1 y_{t-1} + \lambda(y_t^* - y_{t-1}) + \epsilon_t \\ &= (\phi_1 - \lambda) y_{t-1} + \lambda \beta' \mathbf{x}_t + \epsilon_t \end{aligned}$$

- Esto es un modelo ARDL(1,0), pero con los $\{\epsilon_t\}$ no autocorrelados

Estimación:

- Posibles problemas en la estimación:

    1. Multicolinearidad entre regresores

    2. Excesivo número de parámetros

    3. Correlación entre los regresores y el error

- Los problemas 1 y 2 implican que es aconsejable elegir valores pequeños de p y r para un modelo ARDL(p, r)

- Por ello, el modelo ARDL(1,1) es bastante popular:

$$y_t = \mu + \gamma_1 y_{t-1} + \beta_0 x_t + \beta_1 x_{t-1} + \epsilon_t$$

Estimación (cont.):

• Recordamos: si los regresores son correlados con el error, el método MCO ("OLS") produce estimaciones sesgadas e inconsistentes

• En algunos modelos ARDL(p, r) los regresores son correlados con el error

• Solución: estimación con variables instrumentales

• Variables instrumentales son variables que:

$\longrightarrow$ están correladas con el regresor que sustituyen

$\longrightarrow$ no están correladas con el error

$\longrightarrow$ ya no forman parte de la regresión

Estimación (cont.):

• Si $\mathbf{Z}$ es la matriz que tiene en sus columnas las observaciones de las variables explicativas del modelo que no han sido sustituidas, es decir, la matriz de regresores $\mathbf{X}$ y las observaciones de las variables instrumentales, entonces una estimacion consistente de β es:

$$\rightarrow \hat{\beta}_{\mathbf{IV}} = (\mathbf{Z}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{Zy}$$

• El método de mínimos cuadrados en dos etapas (MC2E; "2SLS")se puede usar para realizar una estimación con variables instrumentales

• Primera etapa: regresión de cada regresor correlado con el error del modelo sobre los instrumentos

• Segunda etapa: regresión de la ecuación original sobre los valores de ajuste en lugar de los regresores