ECONOMETRÍA II:

ECONOMETRÍA DE SERIES TEMPORALES

Modelos VAR

Introducción modelos VAR

• Hasta ahora hemos estudiado modelos *uniecuacionales*

• Ahora vamos a estudiar un modelo *multiecuacional* que se llama Vector de Autoregresión ("VAR")

• Ventajas del modelo VAR: a) es relativamente fácil de especificar y de estimar, b) las variables pueden ser no-estacionarias, c) los errores pueden ser correlados contemporáneamente

• Desventajas del modelo VAR: muchos párametros

Introducción modelos VAR (cont.):

• **Definición: modelo VAR**. Un modelo VAR(p) de dimensión M tiene la forma

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{B_1}\mathbf{y}_{t-1} + \cdots + \mathbf{B_p}\mathbf{y}_{t-p} + \mathbf{C}\mathbf{x}_t + \epsilon_t \qquad (1)$$

con $Cov(\epsilon_t, \epsilon_{t-j}) = \mathbf{0}$ para todo $j \neq 0$. $\mathbf{y}_t{}' = [y_{1,t}, \ldots, y_{M,t}]$ es el vector de variables endógenas, $\mathbf{x}_t{}' = [x_{1,t}, \ldots, x_{K,t}]$ es el vector de variables exógenas (incluída la constante), $\mathbf{B}_1, \ldots, \mathbf{B}_p$ son matrices $M \times M$ de parámetros, y $\mathbf{C}$ es una matriz $M \times K$ de parámetros asociada a las variables exógenas

• Con el operador retardo podemos escribir (1) de una forma más compacta:

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{B}(L)\mathbf{y}_t + \mathbf{C}\mathbf{x}_t + \epsilon_t$$

• *Nota*: En este contexto los errores $\epsilon_t{}' = [\epsilon_{1,t}, \ldots, \epsilon_{M,t}]$ se suelen llamar *innovaciones* ("innovations")

Introducción modelos VAR (cont.):

- *Ejemplo* de un VAR(1) con $\mathbf{y}_t{}' = [y_t, z_t]$:

$$
\begin{aligned}
y_t &= b_{11} y_{t-1} + b_{12} z_{t-1} + \epsilon_{1,t} \\
z_t &= b_{21} y_{t-1} + b_{22} z_{t-1} + \epsilon_{2,t}
\end{aligned}
$$

- *Ejemplo* de un VAR(1) con $\mathbf{y}_t{}' = [y_t, z_t]$ y $\mathbf{x}_t{}' = [1]$:

$$
\begin{aligned}
y_t &= b_{11} y_{t-1} + b_{12} z_{t-1} + c_1 + \epsilon_{1,t} \\
z_t &= b_{21} y_{t-1} + b_{22} z_{t-1} + c_2 + \epsilon_{2,t}
\end{aligned}
$$

- *Ejemplo* de un VAR(2) con $\mathbf{y}_t{}' = [y_t, z_t]$:

$$
\begin{aligned}
y_t &= b_{11} y_{t-1} + b_{12} z_{t-1} + b_{13} y_{t-2} + b_{14} z_{t-2} + \epsilon_{1,t} \\
z_t &= b_{21} y_{t-1} + b_{22} z_{t-1} + b_{23} y_{t-2} + b_{24} z_{t-2} + \epsilon_{2,t}
\end{aligned}
$$

Introducción modelos VAR (cont.):

- *Ejemplo* de un VAR(1) con $\mathbf{y}_t{}' = [y_t, z_t]$ y $\mathbf{x}_t{}' = [1, x_t]$:

$$
\begin{aligned}
y_t &= b_{11} y_{t-1} + b_{12} z_{t-1} + c_{10} + c_{11} x_t + \epsilon_{1,t} \\
z_t &= b_{21} y_{t-1} + b_{22} z_{t-1} + c_{20} + c_{21} x_t + \epsilon_{2,t}
\end{aligned}
$$

- *Ejemplo* de un VAR(1) escrito con el operador retardo:

$$
\begin{aligned}
y_t &= b_{11} L y_t + b_{12} L z_t + \epsilon_{1,t} \\
z_t &= b_{21} L y_t + b_{22} L z_t + \epsilon_{2,t}
\end{aligned}
$$

$$\Updownarrow$$

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{B}(L)\mathbf{y}_t + \epsilon_t$$

donde $\mathbf{B}(L) = \left[\begin{array}{c} b_{11} L + b_{12} L \\ b_{21} L + b_{22} L \end{array} \right]$

Estimación e inferencia:

• La ventaja principal del modelo VAR(p) es que, aunque cada variable sea no estacionaria, y aunque haya correlación contemporánea entre los errores ϵ_t, podemos estimar cada ecuación del modelo con MCO

• *Ejemplo* VAR(1) de y_t, z_t con $y_t \sim I(1)$, $z_t \sim I(1)$ y $Corr(\epsilon_{1,t}, \epsilon_{2,t}) \neq 0$:

$$\begin{aligned} y_t &= b_{11} y_{t-1} + b_{12} z_{t-1} + \epsilon_{1,t} \\ z_t &= b_{21} y_{t-1} + b_{22} z_{t-1} + \epsilon_{2,t} \end{aligned}$$

• Es decir, primero estimamos la primera ecuación

$$y_t = b_{11} y_{t-1} + b_{12} z_{t-1} + \epsilon_{1,t}$$

con MCO, y después la segunda ecuación

$$z_t = b_{21} y_{t-1} + b_{22} z_{t-1} + \epsilon_{2,t}$$

también con MCO

Estimación e inferencia (cont.):

- Por tanto, si una o algunas de las variables endógenas son no estacionarias, entonces las pruebas t no son válidas

- Entonces, ¿cómo elegimos p?

  $\longrightarrow$ Evaluando los residuos $\hat{\epsilon}_t$: los queremos no autocorrelados, y si es posible también homoscedásticos y Gaussianos

  $\longrightarrow$ Utilizando criterios de información (AIC, SBC, etc.)

Modelos PVAR

• Valores grandes de p o un gran numero de variables endógenas (o los dos) resulta en muchos párametros, y probablemente una gran parte de ellos son no significativos

• Eso es la motivación para el modelo "PVAR" ("Parsimonious VAR")

• Estimar un modelo PVAR:

→ 1. Transformar las variables para que sean $I(0)$

→ 2. Elegir p

→ 3. Estimar VAR con MCO si no hay correlación contemporánea entre los errores, estimar con FIML si la hay

→ 4. Quitar los regresores no significativos utilizando pruebas t o F

El VAR como forma reducida

• El modelo VAR es de una forma *reducida* en el sentido de que no hay variables endógenas contemporáneas en el lado derecho

• Muchos modelos son formulados en forma *estructural* en el sentido de que una o mas variables endógenas en el lado derecho son contemporáneas

• Por ejemplo, si p_t es precio y q_t es cantidad entonces se dice que el sistema

$$\begin{aligned} p_t &= c_1 + b_{10} q_t + b_{11} p_{t-1} + b_{12} q_{t-1} + \epsilon_{1t} \\ q_t &= c_2 + b_{20} p_t + b_{21} p_{t-1} + b_{22} q_{t-1} + \epsilon_{2t} \end{aligned} \tag{2}$$

es estructural

El VAR como forma reducida

- El sistema (2) se puede escribir como

$$(\mathbf{I}-\mathbf{B_0})\begin{bmatrix} p_t \\ q_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} + \mathbf{B_1}\begin{bmatrix} p_{t-1} \\ q_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \epsilon_{1t} \\ \epsilon_{2t} \end{bmatrix} \qquad (3)$$

donde $\mathbf{B_0} = \begin{bmatrix} 0 & b_{10} \\ b_{20} & 0 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{B_1} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$

- Si la inversa $(\mathbf{I}-\mathbf{B_0})^{-1}$ existe, entonces (3) se puede transformar a una forma reducida:

$$\begin{bmatrix} p_t \\ q_t \end{bmatrix} = (\mathbf{I}-\mathbf{B_0})^{-1}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} + (\mathbf{I}-\mathbf{B_0})^{-1}\mathbf{B_1}\begin{bmatrix} p_{t-1} \\ q_{t-1} \end{bmatrix} + (\mathbf{I}-\mathbf{B_0})^{-1}\begin{bmatrix} \epsilon_{1t} \\ \epsilon_{2t} \end{bmatrix}$$

Estabilidad VAR

- Recordamos: un modelo AR(p) es estable si:

las raíces características están dentro del círculo unidad

$$\Updownarrow$$

las raíces del polinomio $(1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \cdots - \phi_p L^p)$ están fuera del círculo unidad

- Un modelo VAR(p) es estable si:

las raíces características están dentro del círculo unidad

$$\Updownarrow$$

las raíces del polinomio $|\mathbf{I} - \mathbf{B_1} L - \cdots - \mathbf{B_p} L^p|$ están fuera del círculo unidad

Estabilidad VAR (cont.)

• **Proposición: estabilidad de un modelo VAR(p)**. Denotando el polinomio $\mathbf{I} - \mathbf{B_1}L - \cdots - \mathbf{B_p}L^p$ por $\mathbf{A}(L)$, es decir, $\mathbf{A}(L) = \mathbf{I} - \mathbf{B_1}L - \cdots - \mathbf{B_p}L^p$, si todas las raíces de $|\mathbf{A}(\mathrm{z})| = 0$ están fuera del circulo unidad, entonces el modelo VAR(p) es estable

• ¿Cómo comprobamos si las raíces del polinomio $\mathbf{A}(L)$ están dentro o fuera del circulo unidad?

Estabilidad VAR (cont.)

- Recordad:

$\rightarrow$ Si $\mathbf{A} = (a_{11})$, entonces $|\mathbf{A}| = a_{11}$

$\rightarrow$ Si $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, entonces $|\mathbf{A}| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

$\rightarrow$ Si $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, entonces $|\mathbf{A}| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13}$

$\vdots$

etc.

Estabilidad VAR (cont.)

- Cuando $M = 1$ las condiciones de estabilidad para VAR(p) y para AR(p) coinciden, porque:

$$\mathbf{I} - \mathbf{B_1}L - \cdots - \mathbf{B_p}L^p = 1 - b_{11}L - b_{12}L^2 - \cdots - b_{1p}L^p$$

- Para un modelo VAR(1) con $M = 2$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}(L) = \mathbf{I} - \mathbf{B_1}L &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_{11}L & b_{12}L \\ b_{21}L & b_{22}L \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 - b_{11}L & -b_{12}L \\ -b_{21}L & 1 - b_{22}L \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|\mathbf{A}(L)| &= (1 - b_{11}L)(1 - b_{22}L) - b_{12}Lb_{21}L \\
&= 1 - (b_{11} + b_{22})L + (b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21})L^2
\end{aligned}$$

Estabilidad VAR (cont.)

- Para un modelo VAR(2) con $M = 2$ tenemos que

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A}(L) = \mathbf{I} - \mathbf{B_1}L - \mathbf{B_2}L^2 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_{11}L & b_{12}L \\ b_{21}L & b_{22}L \end{bmatrix} \\
- \begin{bmatrix} b_{13}L^2 & b_{14}L^2 \\ b_{23}L^2 & b_{24}L^2 \end{bmatrix} & \\
&= \begin{bmatrix} 1 - b_{11}L - b_{13}L^2 & -b_{12}L - b_{14}L^2 \\ -b_{21}L - b_{23}L^2 & 1 - b_{22}L - b_{24}L^2 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|\mathbf{A}(L)| = &(1 - b_{11}L - b_{13}L^2)(1 - b_{22}L - b_{24}L^2) \\
&- (-b_{12}L - b_{14}L^2)(-b_{21}L - b_{23}L^2)
\end{aligned}
$$

$$
|\mathbf{A}(L)| = a + bL + cL^2 + dL^3 + eL^4
$$

Estabilidad VAR (cont.)

• Encontrar soluciones de polinomios de orden 4 o más grande puede ser bastante difícil

• Afortunadamente existe un método alternativo que utiliza lo que se llama la *forma compañera* ("companion form") del modelo VAR(p)

• La forma compañera de $\mathbf{y}_t = \mathbf{B_1}\mathbf{y}_{t-1} + \cdots + \mathbf{B_1}\mathbf{y}_{t-p} + \epsilon_\mathbf{t}$ tiene la estructura de un modelo VAR(1) y se denota

$$\mathbf{Y}_t = \mathbf{A_1}\mathbf{Y}_{t-1} + \mathbf{E}_t$$

• Las soluciones del polinomio $|\mathbf{I}_{Mp} - \mathbf{A_1}(L)| = 0$ son las raíces del polinomio $|\mathbf{I} - \mathbf{B_1}L - \cdots - \mathbf{B_p}L^p| = 0$

Estabilidad VAR (cont.)

- Donde

$\rightarrow$ $\mathbf{I}_{Mp}$ es una matriz identidad $Mp \times Mp$

$$\rightarrow \mathbf{Y}_t = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_t \\ \mathbf{y}_{t-1} \\ \vdots \\ \mathbf{y}_{t-p+1} \end{bmatrix}, \mathbf{A_1} = \begin{bmatrix} \mathbf{B_1} & \mathbf{B_2} & \cdots & \mathbf{B_{p-1}} & \mathbf{B_p} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \mathbf{E}_t = \begin{bmatrix} \epsilon_t \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

Estabilidad VAR (cont.)

- Por ejemplo, la forma compañera de un modelo VAR(2) de dimensión 2 es

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y}_t \\ \mathbf{y}_{t-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B_1} & \mathbf{B_2} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{t-1} \\ \mathbf{y}_{t-2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \epsilon_t \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

o, más explícitamente,

$$\begin{bmatrix} y_{1,t} \\ y_{2,t} \\ y_{1,t-1} \\ y_{2,t-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{1,t-1} \\ y_{2,t-1} \\ y_{1,t-2} \\ y_{2,t-2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \epsilon_{1,t} \\ \epsilon_{2,t} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Estabilidad VAR (cont.)

- La forma compañera de un modelo VAR(3) de dimensión 2 es

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y}_t \\ \mathbf{y}_{t-1} \\ \mathbf{y}_{t-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 & \mathbf{B}_3 \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{t-1} \\ \mathbf{y}_{t-2} \\ \mathbf{y}_{t-3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \epsilon_t \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

o, más explícitamente,

$$\begin{bmatrix} y_{1,t} \\ y_{2,t} \\ y_{1,t-1} \\ y_{2,t-1} \\ y_{1,t-2} \\ y_{2,t-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{15} & b_{16} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} & b_{25} & b_{26} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{1,t-1} \\ y_{2,t-1} \\ y_{1,t-2} \\ y_{2,t-2} \\ y_{1,t-3} \\ y_{2,t-3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \epsilon_{1,t} \\ \epsilon_{2,t} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$