

MACROECONOMETRÍA

Tema 5: Cointegración y el modelo EqCM

Segundo Cuatrimestre (curso 2006/07), Depto. de Economía, UC3M

Profesor: Genaro Sucarrat

(Coordinador: Juan J. Dolado)

Introducción:

- Recordamos el problema de regresión espuria: consideramos $y_t \sim I(d)$, $x_t \sim I(d)$ donde $d > 0$, y suponemos que queremos estudiar la relación entre y_t y x_t vía la regresión lineal

$$y_t = \alpha_0 + \alpha_1 x_t + u_t$$

- *Ejemplo*: dos paseos aleatorios independientes:

$$\rightarrow y_t = y_{t-1} + \epsilon_{y,t}, \quad \epsilon_{y,t} \sim WN(0, \sigma_y^2)$$

$$\rightarrow x_t = x_{t-1} + \epsilon_{x,t}, \quad \epsilon_{x,t} \sim WN(0, \sigma_x^2)$$

$\rightarrow \epsilon_{y,t}$ y $\epsilon_{x,t}$ independientes $\Rightarrow y_t$ y x_t independientes

- Granger y Newbold (1974) rechazaban la hipótesis de $\alpha_1 = 0$ (con un nivel de significación del 5%) para el 75% de las muestras simuladas, este problema no desaparece cuando el tamaño muestral aumenta

Introducción (cont.):

- ¿Cómo podemos analizar la relación entre los niveles de y_t y x_t ?
Gran parte de la teoría económica se expresa en términos de niveles, no en términos de diferencias

- Una solución es el *análisis de cointegración*

- En resumen, si $x_t \sim I(1)$, $y_t \sim I(1)$, y si existe una combinación lineal tal que esta combinación es $I(0)$, entonces se dice que y_t y x_t son cointegradas

- *Ejemplo.* $y_t \sim I(1)$, $x_t \sim I(1)$ y $e_t \sim I(0)$:

$$y_t = \alpha_0 + \alpha_2 x_t + u_t \Leftrightarrow u_t = y_t - \alpha_0 - \alpha_2 x_t$$

- La interpretación económica de e_t es la desviación del equilibrio
 $y = \alpha_0 + \alpha_1 x_t$

Cointegración:

● **Definición: cointegración.** Las variables $y_{1,t}, \dots, y_{m,t}, \dots, y_{M,t}$ se dicen cointegradas de orden d si:

a) $y_{m,t} \sim I(d)$ con $d > 0$ para $m = 1, \dots, M$

b) existe por lo menos un vector $\alpha \neq \mathbf{0}$, donde $\alpha' = [\alpha_1, \dots, \alpha_M]$, tal que $\alpha_1 y_{1,t} + \dots + \alpha_M y_{M,t} \sim I(0)$

● *Nota:* si α es un vector de cointegración, entonces $\lambda\alpha$ lo es también, donde $\lambda \in \mathbb{R}$. Por esta razón normalizamos $\alpha_1 = 1$

● Puede haber hasta $M - 1$ vectores linealmente independientes. El rango de cointegración es el número de vectores de cointegración linealmente independientes

Cointegración (cont.):

- Algunas reglas sobre combinaciones lineales entre $I(0)$ e $I(1)$:

1. $y_t \sim I(0) \Rightarrow (a + by_t) \sim I(0)$

2. $y_t \sim I(1) \Rightarrow (a + by_t) \sim I(1)$

3. $y_t \sim I(0), x_t \sim I(0) \Rightarrow (ay_t + bx_t) \sim I(0)$

4. $y_t \sim I(0), x_t \sim I(1) \Rightarrow (ay_t + bx_t) \sim I(1)$

5. $y_t \sim I(1), x_t \sim I(1) \Rightarrow (ay_t + bx_t) \sim I(1)$ en general

donde $a, b \in \mathbb{R}$

Cointegración (cont.):

- ¿Cómo estimamos y contrastamos la hipótesis de cointegración?
- El metodo de Engle y Granger (1987):
 1. Estimar la (posible) relación de cointegración con MCO
 2. Utilizar la prueba de Dickey-Fuller para contrastar si la serie de desviaciones $\{\hat{u}_t\}$ es $I(0)$
- Diagnostico de estabilidad: estimacion recursiva de α , estimación recursiva de los estadisticos del error u_t (recordad: $\{u_t\}$ es estacionaria si una relación de cointegración existe)

Cointegración (cont.):

- *Ejemplo.* $y_t \sim I(1)$, $x_t \sim I(1)$:

1. Estimar $y_t = \alpha_0 + \alpha_2 x_t + u_t$ con MCO y generar $\hat{u}_t = y_t - \hat{\alpha}_0 - \hat{\alpha}_2 x_t$

2. Prueba de Dickey-Fuller: estimar y contrastar $\Delta \hat{u}_t = a + b \hat{u}_{t-1}$

→ $H_0: b = 0$ $u_t \sim I(1)$: y_t y x_t no-cointegradas

→ $H_1: b < 0$ $u_t \sim I(0)$: y_t y x_t cointegradas

- *Nota:* Por causa del estimador MCO, $\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \hat{u}_t = 0$. Entonces, pueden ser que no necesitamos el constante a en la prueba de Dickey-Fuller

- *Nota:* En principio podemos incluir retardos de $\Delta \hat{u}_t$ en el paso 2. Es decir, utilizar la prueba de Dickey-Fuller aumentada

Cointegración (cont.):

- Ventajas del metodo Engle-Granger:
 - sencillo, facil (tecnicamente) a estimar
 - estimaciones de α son “superconsistentes”, no solamente consistentes
- Desventajas:
 - si existe mas que un vector de cointegración, entonces el metodo Engle-Granger nos da solamente el vector que minimiza la suma de errores cuadrados
 - contrastes sobre α no se hace facilmente

El MCEq:

- Un modelo que ha sido y sigue siendo muy utilizado es *el modelo de corrección de equilibrio* (MCEq), o en inglés “Equilibrium Correction Model” (EqCM)
- *Nota:* este modelo también se denomina *el modelo de corrección de error* (MCE), o en inglés “Error Correction Model (ECM)”
- Un ejemplo sencillo es la especificación

$$\Delta y_t = \phi_0 + \phi_1 \Delta y_{t-1} + \beta \Delta x_t + \theta (y_{t-1} - \alpha_0 - \alpha_2 x_{t-1}) + e_t$$

donde suponemos que $y_t \sim I(1)$, $x_t \sim I(1)$ y $(y_t - \alpha_0 - \alpha_2 x_t) \sim I(0)$

- *Nota:* θ es la velocidad de ajuste

El MCEq (cont):

- ¿Cuál es la relación entre cointegración y el MCEq?

→ la teorema de representación de Granger: para variables que son $I(1)$, las representaciones MCEq y de cointegración son equivalentes

- *Ejemplo.* $y_t \sim I(1)$, $x_t \sim I(1)$ y que $(y_t - \alpha_0 - \alpha_2 x_t) \sim I(0)$. Entonces la relación en niveles es

$$y_t = \alpha_0 + \alpha_2 x_t + e_t$$

con $e_t \sim I(0)$. Sustrayendo y_{t-1} de los dos lados se obtiene

$$\Delta y_t = \alpha_0 + \alpha_2 x_t - y_{t-1} + e_t,$$

y añadiendo $\alpha_2 x_{t-1} - \alpha_2 x_{t-1}$ en el lado derecho se obtiene un MCEq con $\theta = -1$:

$$\begin{aligned}\Delta y_t &= \alpha_0 + \alpha_2 x_t - y_{t-1} + \alpha_2 x_{t-1} - \alpha_2 x_{t-1} + e_t \\ &= \alpha_0 + \alpha_2 \Delta x_t - (y_{t-1} - \alpha_2 x_{t-1}) + e_t\end{aligned}$$

El MCEq (cont):

- También podemos empezar con un MCEq y transformarlo a un modelo ARDL
- *Ejemplo.* Consideramos un MCEq con la especificación

$$\Delta y_t = \phi_0 + \beta \Delta x_t - \theta(y_{t-1} - \alpha_0 - \alpha_2 x_{t-1}) + e_t$$

donde $y_t \sim I(1)$, $x_t \sim I(1)$ y $(y_t - \alpha_0 - \alpha_2 x_t) \sim I(0)$. Cambiando y_{t-1} al lado derecho se obtiene

$$\begin{aligned} y_t &= \phi_0 - y_{t-1} + \beta \Delta x_t - \theta(y_{t-1} - \alpha_0 - \alpha_2 x_{t-1}) + e_t \\ &= \phi_0 + \theta \alpha_0 - (1 + \theta)y_{t-1} + \beta x_t + (\theta \alpha_2 - \beta)x_{t-1} + e_t. \end{aligned}$$

El MCEq (cont):

- **Definición:** el MCEq general (uniecual, solo un vector de cointegración). Si \mathbf{x}_t es un vector de variables exógenas igual a $[x_{1,t}, \dots, x_{m,t}, \dots, x_{M,t}]'$, y si $y_t \sim I(1)$ y $\mathbf{x}_t \sim \mathbf{I}(1)$, entonces el MCEq general tiene la forma

$$\Delta y_t = \phi_0 + \sum_{i=1}^p \phi_i \Delta y_{t-i} + \sum_{j=0}^r \beta_j' \Delta \mathbf{x}_{t-j} + \theta (y_{t-1} - \alpha_0 - \sum_{m=2}^M \alpha_m x_{m,t-1}) + e_t$$

donde β_j es un vector de parámetros igual a $[\beta_{1j}, \dots, \beta_{rj}]'$

- Dinámica en el corto plazo: $\sum_{i=1}^p \phi_i \Delta y_{t-i} + \sum_{j=0}^r \beta_j' \Delta \mathbf{x}_{t-j}$
- Dinámica en el largo plazo: $\theta (y_{t-1} - \alpha_0 - \sum_{m=1}^M \alpha_m x_{m,t-1})$

El MCEq (cont):

- La estimación de un MCEq (uniecuacional) tiene tres pasos:
 1. Análisis de cointegración
 2. Generar las desviaciones o “errores”

$$\hat{u}_t = y_t - \hat{\alpha}_0 - \hat{\alpha}'\mathbf{x}_t$$

3. Estimar un MCEq con MCO utilizando los \hat{u}_{t-1} como una estimación de la desviación retardada del equilibrio

El MCEq (cont):

- *Ejemplo.* Supongamos que $y_t \sim I(1)$, $x_t \sim I(1)$, y que nuestro análisis sugiere que y_t y x_t son cointegradas. Es decir, que

$$\hat{u}_t \sim I(0), \text{ donde } \hat{u}_t = y_t - \hat{\alpha}_0 - \hat{\alpha}_2 x_t$$

Entonces, el paso número 3 consiste en especificar y estimar el MCEq, por ejemplo:

$$\Delta y_t = \phi_0 + \phi_1 \Delta y_{t-1} + \beta \Delta x_t + \theta \hat{u}_{t-1} + e_t$$

Referencias:

Engle, R. and C. W. Granger (1987). Cointegration and error correction: Representation, estimation and testing. *Econometrica* 55, 251–276.

Granger, C. W. and P. Newbold (1974). Spurious Regressions in Econometrics. *Journal of Econometrics* 2, 111–120.