MACROECONOMETRÍA

Tema 3: Contrastes y especificación de modelos

Segundo Cuatrimestre (curso 2007/08), Depto. de Economía, UC3M

Profesor: Genaro Sucarrat

(Coordinador: Juan J. Dolado)

Introducción:

- Recordamos:

$$y_t = \underbrace{\beta_0 + \beta_1 x_{1t} + \cdots + \beta_K x_{Kt}}_{\substack{\text{Explicación} \\ \text{económica}}} + \underbrace{e_t}_{\substack{\text{Error de la} \\ \text{explicación}}}$$

- *Nota*: las $x_{1t}, \ldots, x_{Kt}$ pueden ser retardos de y_t o variables explicativas/exógenas o ambos

- ¿Qué caracteriza, econometricamente, una buena explicación empírica?

  $\longrightarrow$ precisión empírica (R^2, $\hat{\sigma}$, criterios de información)

  $\longrightarrow$ que los parámetros $\beta_0, \ldots, \beta_K$ sean estables

  $\longrightarrow$ que el error sea ruido blanco (o por lo menos aproximadamente ruido blanco)

Estimación e inferencia:

- Consideramos la regresión lineal

$$\begin{aligned} y_t &= \beta_0 + \beta_1 x_{1t} + \cdots + \beta_k x_{kt} + \cdots + \beta_K x_{Kt} + \epsilon_t \\ &= \beta' \mathbf{x}_t + \epsilon_t \end{aligned}$$

con las hipótesis siguientes:

i) $E(y_t | \mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{t-1}, \epsilon_{t-1}, \ldots) = \beta' \mathbf{x}_t$

ii) $E(\epsilon_t | \mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{t-1}, \epsilon_{t-1}, \ldots) = 0$

iii) $E(\epsilon_t x_{kt} | \mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{t-1}, \epsilon_{t-1}, \ldots) = 0$ para todo k en cada t

iv) $E(\epsilon_t^2 | \mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{t-1}, \epsilon_{t-1}, \ldots) = \sigma^2$ para todo t

v) $E(\epsilon_t \epsilon_{t-j} | \mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{t-1}, \epsilon_{t-1}, \ldots) = 0$ para todo $j \neq t$

Estimación e inferencia (cont.):

• *i*) en palabras: que la media condicional de y_t es igual a la explicación económica

• *ii*) en palabras: que el error condicional de la explicación económica es igual a cero

• *iii*) en palabras: que las variables explicativas no aumentan el error de la explicación

• *iv*) en palabras: una hipótesis de *homocedasticidad*

• *v*) en palabras: una hipótesis de *no autocorrelación*

Estimación e inferencia (cont.):

• Si las hipótesis $i) - v)$ se cumplen, entonces el estimador de mínimos cuadrados ordinario (MCO)

$$\hat{\beta} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-\mathbf{1}}\mathbf{X}'\mathbf{y}$$

es consistente y

$$\hat{\sigma}^2(\hat{\beta}_k) = \sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} = Var(\hat{\beta}_k|\mathbf{X})$$

• Además:

$\rightarrow \frac{\hat{\beta}_k}{\hat{\sigma}(\hat{\beta}_k)} \sim t(T - K - 1)$

$\rightarrow$ Cuando $(T - K - 1) \longrightarrow \infty$, entonces $\frac{\hat{\beta}_k}{\hat{\sigma}(\hat{\beta}_k)}$ se distribuye aproximadamente como $N(0, 1)$

Estimación e inferencia (cont.):

- Consideramos el modelo

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 x_{1t} + \beta_2 x_{2t} + \beta_3 x_{3t} + \beta_4 x_{4t} + \epsilon_t \tag{1}$$

donde las hipótesis $i) - v)$ se cumplen y donde $\epsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$

- Muchas veces queremos contrastar más de una hipótesis $\beta_k = c$ a la vez, por ejemplo si $\beta_0 = 0$,$\beta_1 = \beta_2$ y $\beta_3 = 2\beta_4$ conjuntamente

- Más precisamente:

$\rightarrow H_0$: $\beta_0 = 0$, $\beta_1 = \beta_2$, $\beta_3 = 2\beta_4$

$\rightarrow H_1$: $\beta_0 \neq 0$, $\beta_1 \neq \beta_2$, $\beta_3 \neq 2\beta_4$

Estimación e inferencia (cont.):

- Una regresión no-restringida y una restringida

$$\begin{aligned} y_t &= \hat{\beta}_0^A + \hat{\beta}_1^A x_{1t} + \hat{\beta}_2^A x_{2t} + \hat{\beta}_3^A x_{3t} + \hat{\beta}_4^A x_{4t} + \hat{\epsilon}_t^A \\ y_t &= \hat{\beta}_1^B (x_{1t} + x_{2t}) + \hat{\beta}_3^B (x_{3t} + 2x_{4t}) + \hat{\epsilon}_t^B \end{aligned}$$

se pueden utilizar para contrastar más de una hipótesis a la vez

- Si denotamos la suma de cuadrados residuales de regresiones A y B por SCR^A y SCR^B, respectivamente, entonces

$$\frac{(SCR^B - SCR^A)/g}{SCR^A/(T-K-1)} \sim F(g, T-K-1)$$

donde g es el número de restricciones lineales independientes

Estimación e inferencia (cont.):

- En el caso general:

  $\rightarrow$ H_0: g las restricciones lineales independientes se cumplen

  $\rightarrow$ H_1: las restricciones no se cumplen

  $\rightarrow$ SCR_R es la suma de cuadrados residuales bajo H_0, y SCR bajo H_1

  $\rightarrow$ T es el número de observaciones y $K+1$ es el número de parámetros en la regresión no-restringida (H_1):

$$\frac{(SCR_R - SCR)/g}{SCR/(T-K-1)} \sim F(g, T-K-1)$$

Estimación e inferencia (cont.):

- A veces los residuos no son Gaussianos

- Si las hipótesis $i) - v)$ se cumplen entonces tenemos que, en muestras grandes,

$$\frac{(SCR_R - SCR)/g}{SCR/(T-K-1)}$$

se distribuye aproximadamente como una $\chi^2(g)$

Estimación e inferencia (cont.):

• A veces no conseguimos especificar $\beta' \mathbf{x}_t$ tal que $\{\epsilon_t\}$ sea homocedástico

• ¿Cuáles son las consecuencias de la heterocedasticidad?

$\rightarrow$ Que la precisión del modelo no es constante

$\rightarrow$ Que $\sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$ no es una estimación consistente de $Var(\hat{\beta}|\mathbf{X})$

• Dicho de otra manera, utilizar $\sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$ cuando hay heterocedasticidad puede llevar a conclusiones erróneas sobre los β_k

• Sin embargo, todavía tenemos que $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}$ es una estimación consistente de β

Estimación e inferencia (cont.):

• White (1980) desarolló un estimador (denotado $\sigma^2_{t,W}$) consistente de $Var(\hat{\beta}|\mathbf{X})$ cuando $\{\epsilon_t\}$ es heterocedástica de una manera desconocida

• Newey y West (1987) propusieron un estimador (denotado $\sigma^2_{t,NW}$) más general que es consistente cuando hay, a la vez, heterocedasticidad y autocorrelación de forma desconocida

• Los estimadores de White (1980) y de Newey y West (1987) permiten calcular estimaciones consistentes de $Var(\hat{\beta}|\mathbf{X})$, y hacer contrastes sobre los $\hat{\beta}$

Estimación e inferencia (cont.):

• Notación: los estimadores de White y Newey-West substituyen el estimador ordinario $\sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$ con, respectivamente, $\sigma^2_{t,W}$ en el caso de White, y la matriz $\sigma^2_{t,NW}$ en el caso de Newey-West

• *Nota*: si $\{\epsilon_t\}$ es homocedástico, entonces $\sigma^2_{t,W} = \sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$

• En EViews existe la opción de estimar modelos con el estimador de White o el de Newey-West en lugar del estimador ordinario: después de especificar el modelo, hacer click en "Options", luego en "Heteroskedasticity consistent coefficient covariance"

• En los resultados de EViews, hay una nota que nos indica qué estimador ha sido utilizado

Estimación e inferencia (cont.):

- Si $\{\epsilon_t\}$ es heterocedástico entonces la prueba F de g restricciones no es válida

- En este caso podemos utilizar la prueba de Wald

- Si las hipótesis $i) - iii)$ y $v)$ se cumplen entonces tenemos que, en muestras grandes, el estadístico de Wald (denotado W) se distribuye aproximadamente como una $\chi^2(g)$ donde g es el número de restricciones

- Recuerda, $iv)$ es la hipótesis de homocedasticidad y en muestras grandes—si $iv)$ se cumple—la prueba F es aproximadamente igual a la prueba de Wald

- *Nota*: La prueba de Wald tambien se puede utilizar cuando las restricciones son no-lineales, por ejemplo de tipo $\beta_2\beta_3 = 0$

Estimación e inferencia (cont.):

• A veces no conseguimos especificar $\beta'\mathbf{x}_t$ de forma que $\{\epsilon_t\}$ sea no autocorrelada. Es decir, que v) no se cumple

• ¿Cuáles son las fuentes de autocorrelación?

$\rightarrow$ faltan retardos de y_t en $\mathbf{x}_t$

$\rightarrow$ faltan otras variables explicativas en $\mathbf{x}_t$

$\rightarrow$ uno o varios de los parámetros β_k no son constantes en la muestra (por ejemplo por razones de cambios estructurales, eventos especiales, etc.)

$\rightarrow$ observaciones extremas ("outliers")

Estimación e inferencia (cont.):

• ¿Cuáles son las consecuencias de la autocorrelación?

$\rightarrow$ Si la fuente de autocorrelación es que los parámetros no son constantes, y si la falta de constancia es importante, significa que el modelo no sirve para nada

• ¿Qué hacemos si no conseguimos especificar $\beta' \mathbf{x}_t$ de forma que $\{\epsilon_t\}$ sea (aproximadamente) no autocorrelado?

$\rightarrow$ A veces añadir términos MA elimina la autocorrelación

• *Nota*: esto probablemente afecta las estimaciones de $\hat{\beta}$ e, idealmente, para que esto sea una solución adecuada los parámetros asociados a los términos MA deberían ser estables (cuesta mucho trabajo de comprobar!)

Diagnóstico:

• El objetivo principal de diagnosticar un modelo es comprobar que $\{\epsilon_t\}$ es ruido blanco, y que los parámetros son estables

• Si los $\{\epsilon_t\}$ deben ser Gaussianos, por ejemplo por razones de inferencia, entonces hay que comprobarlo también

• Pruebas comunes de autocorrelación: prueba de la Q (Box-Pierce, Ljung-Box), prueba LM de Breusch y Godfrey

• Pruebas comunes de heterocedasticidad: prueba de la Q (Box-Pierce, Ljung-Box), prueba ARCH de Engle, pruebas de White

• Prueba común de normalidad (residuos Gaussianos): prueba de Jarque-Bera

• Pruebas comunes de estabilidad: pruebas de Chow, estimación recursiva

Diagnóstico (cont.):

- Prueba de la Q de autocorrelación:

$$H_0 : \rho_j = 0 \text{ para } j = 1, \ldots, q$$

$$H_1 : \text{al menos un } \rho_j \neq 0$$

$$\text{Box-Pierce} : Q = T \sum_{j=1}^{q} \hat{\rho}_j^2 \ \sim \ \chi^2(q)$$

$$\text{Ljung-Box} : Q = T(T+2) \sum_{j=1}^{q} \frac{\hat{\rho}_j^2}{T-q} \ \sim \ \chi^2(q)$$

- *Nota*: La prueba de Ljung-Box es una modificación de Box-Pierce y funciona mejor en muestras pequeñas

Diagnóstico (cont.):

• La prueba LM de Breusch-Godfrey consiste en estimar una regresión auxiliar con MCO y hacer un contraste sobre los parámetros de esta regresión

• Supongamos que ya hemos estimado el modelo

$$y_t = \hat{\beta}'\mathbf{x}_t + \hat{\epsilon}_t$$

• La regresión auxiliar para un contraste de autocorrelación de orden q o menor en los residuos tiene la forma

$$\hat{\epsilon}_t = \hat{\alpha}'\mathbf{x}_t + \sum_{j=1}^{q} \hat{\gamma}_j \hat{\epsilon}_{t-j} + \hat{u}_t$$

con estadístico $LM = T \cdot R^2_{nc}$ y, en muestras grandes (formalmente cuando $T \rightarrow \infty$), $LM \sim \chi^2(q)$, donde R^2_{nc} es R^2 no-centrado

Diagnóstico (cont.):

• Denota $\tau_j = Corr(\epsilon_t^2, \epsilon_{t-j}^2)$. La prueba de la Q de heterocedasticidad autoregresiva ("ARCH"):

$$H_0 : \tau_j = 0 \text{ para } j = 1, \ldots, q$$

$$H_1 : \text{al menos un } \tau_j \neq 0$$

• *Nota*: homocedasticidad $\Rightarrow H_0$

$$\text{Box-Pierce} : Q = T \sum_{j=1}^{q} \hat{\tau}_j^2 \sim \chi^2(q)$$

$$\text{Ljung-Box} : Q = T(T+2) \sum_{j=1}^{q} \frac{\hat{\tau}_j^2}{T-q} \sim \chi^2(q)$$

Diagnóstico (cont.):

- Prueba LM de Engle de heterocedasticidad autoregresiva:

$H_0 : \tau_j = 0$ para $j = 1, \ldots, q$

H_1 : al menos un $\tau_j \neq 0$

- Supongamos que ya hemos estimado el modelo

$$y_t = \hat{\beta}' \mathbf{x}_t + \hat{\epsilon}_t$$

- La regresión auxiliar para un contraste de ARCH de orden q o menor en los residuos tiene la forma

$$\hat{\epsilon}_t^2 = \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 \hat{\epsilon}_{t-1}^2 + \cdots + \hat{\alpha}_q \hat{\epsilon}_{t-q}^2 + \hat{u}_t$$

- Asintóticamente $T \cdot R_{nc}^2 \sim \chi^2(q)$, donde R_{nc}^2 es R^2 no-centrado

Diagnóstico (cont.):

- Prueba de Jarque y Bera: una prueba de normalidad de $\{\epsilon_t\}$

- La prueba de Jarque y Bera comprueba dos cosas: si $E[(\epsilon_t/\sigma)^3] = 0$ (simetría) y si $E[(\epsilon_t/\sigma)^4] = 3$ (kurtosis)

$\rightarrow$ Medida de simetría: $S = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left(\frac{\hat{\epsilon}_t}{\hat{\sigma}}\right)^3$

$\rightarrow$ Medida de kurtosis: $C = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left(\frac{\hat{\epsilon}_t}{\hat{\sigma}}\right)^4$

- Entonces

$$JB = \frac{T-C}{6}\left(S^2 + \frac{(C-3)^2}{4}\right) \sim \chi^2(2)$$

Diagnóstico (cont.):

• Prueba de Chow número 1 ("Chow's breakpoint test"): comprueba si β es constante

• El objetivo es contrastar si $\beta_A = \beta_B$, y la prueba tiene 3 pasos:

1. Estimar $y_t = \beta' \mathbf{x}_t + \epsilon_t, \qquad t = 1, \ldots, T$

2. Estimar $y_t = \beta'_A \mathbf{x}_t + \epsilon_{A,t}, \qquad t = 1, \ldots, T_A$

3. Estimar $y_t = \beta'_B \mathbf{x}_t + \epsilon_{B,t}, \qquad t = T_A + 1, \ldots, T$

• Si ϵ_t, $\epsilon_{A,t}$ y $\epsilon_{B,t}$ son ruidos blancos Gaussianos, entonces

$$\frac{(SCR - SCR_A - SCR_B)}{(SCR_A + SCR_B)} \cdot \frac{(T - 2K - 2)}{K + 1} \sim F(K + 1, T - 2K - 2)$$

Diagnóstico (cont.):

- Prueba de Chow número 2 ("Chow's forecast test"): comprueba si β es constante

  $\rightarrow$ Ventaja respecto a la prueba número 1: permite que la muestra B sea pequeña, incluso $< K+1$

- La prueba tiene 2 pasos:

  1. Estimar $y_t = \beta' \mathbf{x}_t + \epsilon_t, \qquad t = 1, \ldots, T$
  2. Estimar $y_t = \beta_A' \mathbf{x}_t + \epsilon_{At}, \qquad t = 1, \ldots, T_A$

- Idea: contrastar si $\beta = \beta_B$

- Si ϵ_t, ϵ_{At} y ϵ_{Bt} son ruido blanco Gaussiano, entonces

$$\frac{(SCR - SCR_A)}{SCR_A} \cdot \frac{(T_A - K - 1)}{T_B} \sim F(T_B, T_A - K - 1)$$

Diagnóstico (cont.):

• La estimación recursiva nos permite estudiar la estabilidad de β de una manera directa

• En resumen, la estimación recursiva consiste en estimar β utilizando $N = T - n, \ldots, T$ observaciones

• *Nota*: en EViews $T - n = K + 1$

Modelización:

- ¿Cómo desarollamos un buen modelo empírico?

- En Macroeconometría se pueden distinguir 3 estrategias principales para el desarollo de modelos empíricos:

    1. Modelización de lo general a lo específico ("GETS")
    2. Modelización de lo simple a lo general ("STOG")
    3. Microfundamentos

- *Nota*: las estrategias se pueden combinar

Modelización GETS:

- En resumen el método GETS tiene 3 pasos:

  1. Especificar un modelo general y no-restringido ("GUM") congruente, o por lo menos lo mas congruente posible

  2. Simplificar/restringir el GUM, por ejemplo quitando variables una a una, comprobando cada vez que el modelo resultante es congruente

  3. Comprobar que las simplificaciones del modelo final constituyen conjuntamente restricciones válidas (respecto al GUM)

Modelización GETS (cont.):

- Ventajas del método GETS:

  → las hipótesis son anidadas en el GUM

  → el desarollo del modelo específico consiste en contrastar las hipótesis contenidas en el GUM

  → la estimación e inferencia en modelos anidados da lugar a contrastes más "correctas" y (posiblemente, pero no siempre) en inferencia más potente

- Desventajas:

  → la especificación de un GUM no-lineal puede ser difícil por razones númericas

  → idealmente la simplificación debería hacerse por búsqueda por múltiples caminos, pero por razones prácticas el investigador normalmente hace solamente una búsqueda de un (o algunos) camino(s)

Modelización GETS (cont.):

• Un modelo econométrico no puede contener la verdad, toda la verdad, y nada más que la verdad

• Dicho de otro manera, suponer que un modelo econometrico es *el* modelo "verdadero" no tiene sentido

• Esto es la motivación para una definición de "verdad econométrica": congruencia

• Intuitivamente un modelo es congruente si el modelo podría haber producido las observaciones empíricas

→ siempre existe más de un modelo congruente, y entonces necesitamos criterios para elegir entre ellos. Esto es la motivación para la idea de "encompassing"

Modelización GETS (cont.):

• Más precisamente un modelo lineal o no-lineal $y_t = f(\beta, \mathbf{x}_t) + \epsilon_t$ se dice congruente si el modelo satisface las condiciones siguientes:

1. La distribución de $\{\epsilon_t\}$ es constante (no depende de t)
2. Los parámetros β son constantes
3. Exogeneidad débil
4. El modelo tiene una justificación económica
5. El modelo es consistente con los datos

• Si el modelo también explica los resultados obtenidos anteriormente con otros modelos, entonces se dice que el modelo es "congruent encompassing", o que el modelo "encompasses" los modelos anteriores

Modelización GETS (cont.):

• Una implementación sencilla del método GETS con búsqueda por solamente 1 camino en un contexto uniecuacional:

1. Especificar un GUM con ruido blanco y con parámetros estables según pruebas de Chow

2. Contrastar restricciones, una a una, comprobando cada vez que el error es ruido blanco

3. Contrastar que las restricciones son válidas conjuntamente, para comprobar que las restricciones conjuntamente son válidas con respecto al GUM ("parsimonious encompassing")

4. Comprobar que los parámetros son estables utilizando las pruebas de Chow y estimación recursiva

Modelización STOG

- En resumen el método de lo simple a lo general ("STOG") consiste en empezar con un modelo simple y aumentarlo paso a paso

- Ventajas:

  → menos problemas númericos en la estimación de modelos no-lineales

  → en muestras pequeñas, posiblemente inferencia mas robusta comparado con el método GETS

- Desventajas:

  → "incorrecta" estimación e inferencia

  → inferencia menos poderosa

- *Nota*: a veces el método STOG puede ser util para especificar el GUM

Microfundamentos:

• Una definición: se dice que un modelo macro tiene microfundamentos si el modelo macro se puede derivar del modelo micro

• Ventaja:

$\longrightarrow$ permite un análisis entre niveles

• Desventajas:

$\longrightarrow$ pluralidad de microfundamentos, un macromodelo siempre se puede derivar de mas de un modelo micro, y entonces microfundamentos constituyen una restricción al modelo macro

$\longrightarrow$ posibilidad de inferencia incorrecta entre niveles

$\longrightarrow$ mayoría de modelos micro no son muy realisticos

Referencias:

Newey, W. and K. West (1987). A Simple Positive Semi-Definite, Heteroskedasticity and Autocorrelation Consistent Covariance Matrix. *Econometrica 55*, 703–708.

White, H. (1980). A Heteroskedasticity-Consistent Covariance Matrix and a Direct Test for Heteroskedasticity. *Econometrica 48*, 817–838.