MACROECONOMETRÍA

Tema 5: Cointegración y el modelo EqCM

Segundo Cuatrimestre (curso 2007/08), Depto. de Economía, UC3M

Profesor: Genaro Sucarrat

(Coordinador: Juan J. Dolado)

Introducción:

• Recordamos el problema de regresión espuria: consideramos $y_t \sim I(d)$, $x_t \sim I(d)$ donde $d > 0$, y suponemos que queremos estudiar la relación entre y_t y x_t vía la regresión lineal

$$y_t = \alpha_0 + \alpha_1 x_t + u_t$$

• *Ejemplo*: dos paseos aleatorios independientes:

$\rightarrow y_t = y_{t-1} + \epsilon_{y,t}, \quad \epsilon_{y,t} \sim WN(0, \sigma_y^2)$

$\rightarrow x_t = x_{t-1} + \epsilon_{x,t}, \quad \epsilon_{x,t} \sim WN(0, \sigma_x^2)$

$\rightarrow$ $\epsilon_{y,t}$ y $\epsilon_{x,t}$ independientes $\Rightarrow$ y_t y x_t independientes

• Granger y Newbold (1974) rechazaban la hipótesis de $\alpha_1 = 0$ (con un nivel de significación del 5%) para el 75% de las muestras simuladas. Este problema no desaparece cuando el tamaño muestral aumenta

Introducción (cont.):

• ¿Cómo podemos analizar la relación entre los niveles de y_t y x_t? Gran parte de la teoría económica se expresa en términos de niveles, no en términos de diferencias

• Una solución es el *análisis de cointegración*

• En resumen, si $x_t \sim I(1)$, $y_t \sim I(1)$, y si existe una combinación lineal tal que esta combinación es $I(0)$, entonces se dice que y_t y x_t son cointegradas

• *Ejemplo*. $y_t \sim I(1)$, $x_t \sim I(1)$ y $e_t \sim I(0)$:

$$y_t = \alpha_0 + \alpha_2 x_t + u_t \Leftrightarrow u_t = y_t - \alpha_0 - \alpha_2 x_t$$

• La interpretación económica de u_t es la desviación del equilibrio $y = \alpha_0 + \alpha_1 x_t$

Cointegración:

• **Definición: cointegración**. Las variables $y_{1,t}, \ldots, y_{m,t}, \ldots, y_{M,t}$ se dicen cointegradas de orden d si:

a) $y_{m,t} \sim I(d)$ con $d > 0$ para $m = 1, \ldots, M$

b) existe por lo menos un vector $\alpha \neq \mathbf{0}$, donde $\alpha' = [\alpha_1, \ldots, \alpha_M]$, tal que $\alpha_1 y_{1,t} + \cdots + \alpha_M y_{M,t} \sim I(0)$

• *Nota*: si α es un vector de cointegración, entonces $\lambda\alpha$ también lo es, donde $\lambda \in \mathbb{R}$. Por esta razon normalizamos $\alpha_1 = 1$

• Puede haber hasta $M - 1$ vectores linealmente independientes. El rango de cointegración es el número de vectores de cointegración linealmente independientes

Cointegración (cont.):

- Algunas reglas sobre combinaciones lineales entre $I(0)$ e $I(1)$:

  1. $y_t \sim I(0) \Rightarrow (a + by_t) \sim I(0)$
  2. $y_t \sim I(1) \Rightarrow (a + by_t) \sim I(1)$
  3. $y_t \sim I(0), x_t \sim I(0) \Rightarrow (ay_t + bx_t) \sim I(0)$
  4. $y_t \sim I(0), x_t \sim I(1) \Rightarrow (ay_t + bx_t) \sim I(1)$
  5. $y_t \sim I(1), x_t \sim I(1) \Rightarrow (ay_t + bx_t) \sim I(1)$ en general

donde $a, b \in \mathbb{R}$

Cointegración (cont.):

- ¿Cómo estimamos y contrastamos la hipótesis de cointegración?

- El método de Engle y Granger (1987):

    1. Estimar la (posible) relación de cointegración con MCO

    2. Utilizar la prueba de Dickey-Fuller para contrastar si la serie de desviaciones $\{\hat{u}_t\}$ es $I(0)$

- Diagnóstico de estabilidad: estimación recursiva de α, estimación recursiva de los estadísticos del error u_t (recordad: $\{u_t\}$ es estacionaria si existe una relación de cointegración)

Cointegración (cont.):

- *Ejemplo*. $y_t \sim I(1)$, $x_t \sim I(1)$:

  1. Estimar $y_t = b_0 + a_2 x_t + u_t$ con MCO y generar $\hat{u}_t = y_t - \hat{\alpha}_0 - \hat{\alpha}_2 x_t$

  2. Prueba de Dickey-Fuller (aumentada): estimar $\Delta\hat{u}_t = a + b\hat{u}_{t-1} + e_t$ y contrastar b

  $\rightarrow H_0$: $b = 0$ $\quad u_t \sim I(1)$: y_t y x_t no-cointegradas

  $\rightarrow H_1$: $b < 0$ $\quad u_t \sim I(0)$: y_t y x_t cointegradas

- *Nota*: Puede que se necesita retardos de $\Delta\hat{u}_t$ en el paso 2. Es decir, que la prueba de Dickey-Fuller aumentada es mas apropriado

Cointegración (cont.):

- Ventajas del método Engle-Granger:

  → sencillo, fácil (técnicamente) de estimar

  → las estimaciones de α son "superconsistentes", no solamente consistentes

- Desventajas:

  → si existe más de un vector de cointegración, entonces el método Engle-Granger nos da solamente el vector que minimiza la suma de errores cuadrados

  → los contrastes sobre α no son fáciles de hacer

El MCEq:

• Un modelo que ha sido y sigue siendo muy utilizado es *el modelo de corrección de equilibrio* (MCEq), o en inglés "Equilibrium Correction Model" (EqCM)

• *Nota*: este modelo también se denomina *el modelo de corrección de error* (MCE), o en inglés "Error Correction Model (ECM)"

• Un ejemplo sencillo es la especificación

$$\Delta y_t = \phi_0 + \phi_1 \Delta y_{t-1} + \beta \Delta x_t + \theta(y_{t-1} - \alpha_0 - \alpha_2 x_{t-1}) + e_t,$$

suponiendo que $y_t \sim I(1)$, $x_t \sim I(1)$ y $(y_t - \alpha_0 - \alpha_2 x_t) \sim I(0)$

• *Nota*: θ es la velocidad de ajuste

El MCEq (cont):

- ¿Cuál es la relación entre cointegración y el MCEq?

  $\rightarrow$ el teorema de representación de Granger: para variables que son $I(1)$, las representaciones MCEq y de cointegración son equivalentes

- *Ejemplo*. $y_t \sim I(1)$, $x_t \sim I(1)$ y que $(y_t - \alpha_0 - \alpha_2 x_t) \sim I(0)$.

Entonces la relación en niveles es

$$y_t = \alpha_0 + \alpha_2 x_t + e_t$$

con $e_t \sim I(0)$. Sustrayendo y_{t-1} de los dos lados se obtiene

$$\Delta y_t = \alpha_0 + \alpha_2 x_t - y_{t-1} + e_t,$$

y añadiendo $\alpha_2 x_{t-1} - \alpha_2 x_{t-1}$ en el lado derecho se obtiene un MCEq con $\theta = -1$:

$$\begin{aligned} \Delta y_t &= \alpha_0 + \alpha_2 x_t - y_{t-1} + \alpha_2 x_{t-1} - \alpha_2 x_{t-1} + e_t \\ &= \alpha_0 + \alpha_2 \Delta x_t - (y_{t-1} - \alpha_2 x_{t-1}) + e_t \end{aligned}$$

El MCEq (cont):

- También podemos empezar con un MCEq y transformarlo a un modelo ARDL

- *Ejemplo*. Consideramos un MCEq con la especificación

$$\Delta y_t = \phi_0 + \beta \Delta x_t + \theta(y_{t-1} - \alpha_0 - \alpha_2 x_{t-1}) + e_t$$

donde $y_t \sim I(1)$, $x_t \sim I(1)$ y $(y_t - \alpha_0 - \alpha_2 x_t) \sim I(0)$. Cambiando y_{t-1} al lado derecho se obtiene

$$\begin{aligned} y_t &= \phi_0 + y_{t-1} + \beta \Delta x_t + \theta(y_{t-1} - \alpha_0 - \alpha_2 x_{t-1}) + e_t \\ &= (\phi_0 + \theta\alpha_0) + \beta x_t + (1+\theta) y_{t-1} - (\beta + \theta\alpha_2) x_{t-1} + e_t. \end{aligned}$$

El MCEq (cont):

• **Definición: el MCEq general (uniecuacional, sólo un vector de cointegración)**. Si $\mathbf{x}_t$ es un vector de variables exógenas igual a $[x_{1,t},\ldots,x_{m,t},\ldots,x_{M,t}]'$, y si $y_t \sim I(1)$ y $\mathbf{x}_t \sim \mathbf{I(1)}$, entonces el MCEq general tiene la forma

$$\Delta y_t = \phi_0 + \sum_{i=1}^{p} \phi_i \Delta y_{t-i} + \sum_{j=0}^{r} \beta_j' \Delta \mathbf{x}_{t-j} + \theta(y_{t-1} - \alpha_0 - \sum_{m=2}^{M} \alpha_m x_{m,t-1}) + e_t$$

donde β_j es un vector de parámetros igual a $[\beta_{1j},\ldots,\beta_{rj}]'$

• Dinámica a corto plazo: $\sum_{i=1}^{p} \phi_i \Delta y_{t-i} + \sum_{j=0}^{r} \beta_j' \Delta \mathbf{x}_{t-j}$

• Dinámica a largo plazo: $\theta(y_{t-1} - \alpha_0 - \sum_{m=1}^{M} \alpha_m x_{m,t-1})$

El MCEq (cont):

- La estimación de un MCEq (uniecuacional) tiene tres pasos:

1. Análisis de cointegración

2. Generar las desviaciones o "errores"

$$\hat{u}_t = y_t - \hat{\alpha}_0 - \hat{\alpha}' \mathbf{x}_t$$

3. Estimar un MCEq con MCO utilizando los $\hat{u}_{t-1}$ como una estimación de la desviación retardada del equilibrio

El MCEq (cont):

• *Ejemplo*. Supongamos que $y_t \sim I(1)$, $x_t \sim I(1)$, y que nuestro análisis sugiere que y_t y x_t son cointegradas. Es decir, que

$$\hat{u}_t \sim I(0), \text{ donde } \hat{u}_t = y_t - \hat{\alpha}_0 - \hat{\alpha}_2 x_t$$

Entonces, el paso número 3 consiste en especificar y estimar el MCEq, por ejemplo:

$$\Delta y_t = \phi_0 + \phi_1 \Delta y_{t-1} + \beta \Delta x_t + \theta \hat{u}_{t-1} + e_t$$

Referencias:

Engle, R. and C. W. Granger (1987). Cointegration and error correction: Representation, estimation and testing. *Econometrica 55, 251–276.*

Granger, C. W. and P.Ñewbold (1974). Spurious Regressions in Econometrics. Journal of Econometrics 2, 111–120.