MACROECONOMETRÍA

Tema 6: El modelo VAR

Segundo Cuatrimestre (curso 2007/08), Depto. de Economía, UC3M

Profesor: Genaro Sucarrat

(Coordinador: Juan J. Dolado)

Introducción modelos VAR

- Hasta ahora hemos estudiado modelos *uniecuacionales*

- Ahora vamos a estudiar un modelo *multiecuacional* que se llama Vector de Autoregresión ("VAR")

- Ventajas del modelo VAR: a) es relativamente fácil de especificar y de estimar, b) las variables pueden ser no-estacionarias, c) los errores pueden ser contemporáneamente correlados

- Desventajas del modelo VAR: muchos párametros/pocos grados de libertad

Introducción modelos VAR (cont.):

• **Definición: modelo VAR**. Un modelo VAR(p) de dimensión M tiene la forma

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{B_1 y}_{t-1} + \cdots + \mathbf{B_p y}_{t-p} + \mathbf{C x}_t + \epsilon_t \tag{1}$$

con $Cov(\epsilon_t, \epsilon_{t-j}) = \mathbf{0}$ para todo $j \neq 0$. $\mathbf{y}_t{}' = [y_{1,t}, \ldots, y_{M,t}]$ es el vector de variables endógenas, $\mathbf{x}_t{}' = [x_{1,t}, \ldots, x_{K,t}]$ es el vector de variables exógenas (incluída la constante), $\mathbf{B}_1, \ldots, \mathbf{B}_p$ son matrices $M \times M$ de parámetros, y $\mathbf{C}$ es la matriz $M \times K$ de parámetros asociada a las variables exógenas

• Con el operador retardo podemos escribir (1) de una forma más compacta:

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{B}(L)\mathbf{y}_t + \mathbf{C x}_t + \epsilon_t$$

• *Nota*: En este contexto los errores $\epsilon_t{}' = [\epsilon_{1,t}, \ldots, \epsilon_{M,t}]$ se suelen llamar *innovaciones* ("innovations")

Introducción modelos VAR (cont.):

- *Ejemplo* de un VAR(1) con $\mathbf{y}_t{}' = [y_t, z_t]$:

$$\begin{aligned} y_t &= b_{11} y_{t-1} + b_{12} z_{t-1} + \epsilon_{1,t} \\ z_t &= b_{21} y_{t-1} + b_{22} z_{t-1} + \epsilon_{2,t} \end{aligned}$$

- *Ejemplo* de un VAR(1) con $\mathbf{y}_t{}' = [y_t, z_t]$ y $\mathbf{x}_t{}' = [1]$:

$$\begin{aligned} y_t &= b_{11} y_{t-1} + b_{12} z_{t-1} + c_1 + \epsilon_{1,t} \\ z_t &= b_{21} y_{t-1} + b_{22} z_{t-1} + c_2 + \epsilon_{2,t} \end{aligned}$$

- *Ejemplo* de un VAR(2) con $\mathbf{y}_t{}' = [y_t, z_t]$:

$$\begin{aligned} y_t &= b_{11} y_{t-1} + b_{12} z_{t-1} + b_{13} y_{t-2} + b_{14} z_{t-2} + \epsilon_{1,t} \\ z_t &= b_{21} y_{t-1} + b_{22} z_{t-1} + b_{23} y_{t-2} + b_{24} z_{t-2} + \epsilon_{2,t} \end{aligned}$$

Introducción modelos VAR (cont.):

- *Ejemplo* de un VAR(1) con $\mathbf{y}_t{}' = [y_t, z_t]$ y $\mathbf{x}_t{}' = [1, x_t]$:

$$
\begin{aligned}
y_t &= b_{11} y_{t-1} + b_{12} z_{t-1} + c_{10} + c_{11} x_t + \epsilon_{1,t} \\
z_t &= b_{21} y_{t-1} + b_{22} z_{t-1} + c_{20} + c_{21} x_t + \epsilon_{2,t}
\end{aligned}
$$

- *Ejemplo* de un VAR(1) escrito con el operador retardo:

$$
\begin{aligned}
y_t &= b_{11} L y_t + b_{12} L z_t + \epsilon_{1,t} \\
z_t &= b_{21} L y_t + b_{22} L z_t + \epsilon_{2,t}
\end{aligned}
$$

$$\Updownarrow$$

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{B}(L)\mathbf{y}_t + \epsilon_t$$

donde $\mathbf{B}(L) = \left[\begin{array}{cc} b_{11} L & b_{12} L \\ b_{21} L & b_{22} L \end{array} \right]$

Introducción modelos VAR (cont.):

- *Ejemplo* de un VAR(2) escrito con el operador retardo:

$$\begin{aligned} y_t &= b_{11}Ly_t + b_{12}Lz_t + b_{13}L^2y_t + b_{14}L^2z_t + \epsilon_{1,t} \\ z_t &= b_{21}Ly_t + b_{22}Lz_t + b_{23}L^2y_t + b_{24}L^2z_t + \epsilon_{2,t} \end{aligned}$$

$$\Updownarrow$$

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{B_1}L\mathbf{y}_t + \mathbf{B_2}L^2\mathbf{y}_t + \epsilon_t$$

donde $\mathbf{B_1}L = \begin{bmatrix} b_{11}L & b_{12}L \\ b_{21}L & b_{22}L \end{bmatrix}, \mathbf{B_2}L^2 = \begin{bmatrix} b_{13}L^2 & b_{14}L^2 \\ b_{23}L^2 & b_{24}L^2 \end{bmatrix}$, o

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{B}(L)\mathbf{y}_t + \epsilon_t$$

donde $\mathbf{B}(L) = [\mathbf{B_1}L + \mathbf{B_2}L^2] = \begin{bmatrix} b_{11}L + b_{13}L^2 & b_{12}L + b_{14}L^2 \\ b_{21}L + b_{23}L^2 & b_{22}L + b_{24}L^2 \end{bmatrix}$

Estimación e inferencia:

• La ventaja principal del modelo VAR(p) es que, aunque cada variable sea no estacionaria, y aunque haya correlación contemporánea entre los errores ϵ_t, podemos estimar cada ecuación del modelo con MCO

• *Ejemplo* VAR(1) de y_t, z_t con $y_t \sim I(1)$, $z_t \sim I(1)$ y $Corr(\epsilon_{1,t}, \epsilon_{2,t}) \neq 0$:

$$\begin{aligned} y_t &= b_{11} y_{t-1} + b_{12} z_{t-1} + \epsilon_{1,t} \\ z_t &= b_{21} y_{t-1} + b_{22} z_{t-1} + \epsilon_{2,t} \end{aligned}$$

• Es decir, primero estimamos la primera ecuación

$$y_t = b_{11} y_{t-1} + b_{12} z_{t-1} + \epsilon_{1,t}$$

con MCO, y después la segunda ecuación

$$z_t = b_{21} y_{t-1} + b_{22} z_{t-1} + \epsilon_{2,t}$$

también con MCO

Estimación e inferencia (cont.):

• Sin embargo, si una o algunas de las variables endógenas son no estacionarias, entonces las pruebas t no son válidas

• Entonces, ¿cómo elegimos p?

$\rightarrow$ Evaluando los residuos $\hat{\epsilon}_t$: los queremos no autocorrelados, y si es posible también homocedásticos (y Gaussianos)

$\rightarrow$ Utilizando criterios de información (AIC, SBC, etc.)

($\rightarrow$ Transformar las variables no-estacionarias a estacionarias y modelizar un VAR parsimonioso ("PVAR"))

Estabilidad VAR

- Recordamos: un modelo AR(p) es estable si:

las raíces características están dentro del círculo unidad

$$\Updownarrow$$

las soluciones de $(1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \cdots - \phi_p L^p) = 0$ están fuera del círculo unidad

- Un modelo VAR(p) es estable si:

las raíces características están dentro del círculo unidad

$$\Updownarrow$$

las soluciones de $|\mathbf{I} - \mathbf{B_1} L - \cdots - \mathbf{B_p} L^p| = 0$ están fuera del círculo unidad

Estabilidad VAR (cont.)

- **Proposición (Hamilton 1994, p. 259): estabilidad de un modelo VAR(p)**. Denotando el polinomio $\mathbf{I} - \mathbf{B_1}L - \cdots - \mathbf{B_p}L^p$ por $\mathbf{A}(L)$, es decir, $\mathbf{A}(L) = \mathbf{I} - \mathbf{B_1}L - \cdots - \mathbf{B_p}L^p$, si todas las soluciones $L_1, \ldots, L_p$ de $|\mathbf{A}(L)| = 0$ están fuera del círculo unidad, entonces el modelo VAR(p) es estable

- ¿Cómo comprobamos si las soluciones de $|\mathbf{A}(L)| = 0$ están dentro o fuera del círculo unidad?

- *Nota*: en este contexto estabilidad es equivalente a estacionariedad

Estabilidad VAR (cont.)

- Recordad:

$\rightarrow$ Si $\mathbf{A} = (a_{11})$, entonces $|\mathbf{A}| = a_{11}$

$\rightarrow$ Si $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, entonces $|\mathbf{A}| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

$\rightarrow$ Si $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, entonces $|\mathbf{A}| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13}$

$\vdots$

etc.

Estabilidad VAR (cont.)

- Cuando $M = 1$ las condiciones de estabilidad para VAR(p) y para AR(p) coinciden, porque:

$$\mathbf{I} - \mathbf{B_1}L - \cdots - \mathbf{B_p}L^p = 1 - b_{11}L - b_{12}L^2 - \cdots - b_{1p}L^p$$

- Para un modelo VAR(1) con $M = 2$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}(L) = \mathbf{I} - \mathbf{B_1}L &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_{11}L & b_{12}L \\ b_{21}L & b_{22}L \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 - b_{11}L & -b_{12}L \\ -b_{21}L & 1 - b_{22}L \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|\mathbf{A}(L)| &= (1 - b_{11}L)(1 - b_{22}L) - b_{12}Lb_{21}L \\
&= 1 - (b_{11} + b_{22})L + (b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21})L^2
\end{aligned}$$

Estabilidad VAR (cont.)

- *Ejemplo*, Patterson (2000, pp. 604-605). $\mathbf{y}_t = \mathbf{B_1}\mathbf{y}_{t-1} + \epsilon_t$

donde $\mathbf{y'}_t = [y_t, z_t]$, $\epsilon_t \sim \mathbf{WN}(\mathbf{0}, \Sigma^2)$, $\mathbf{B_1} = \begin{bmatrix} 5/8 & 1/2 \\ 1/4 & 5/8 \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned} |\mathbf{A}(L)| &= |\mathbf{I} - \mathbf{B_1} L| \\ &= (1 - 5L/8)^2 - L^2/8 \\ &= 17L^2/64 - 10L/8 + 1 \end{aligned}$$

Las soluciones de $|\mathbf{A}(L)| = 0$ son 1.022, 3.684 (las raíces características son $1/1.022 = 0.978$ y $1/3.684 = 0.271$), y entonces el modelo es estable y estacionario

Estabilidad VAR (cont.)

- *Ejemplo.* $\mathbf{y}_t = \mathbf{c} + \mathbf{B_1}\mathbf{y}_{t-1} + \epsilon_t$ donde $\mathbf{y'}_t = [y_t, z_t]$,

$\mathbf{c}' = [1/5, 2/5]$, $\mathbf{B_1} = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/2 \\ 1/4 & 5/8 \end{bmatrix}$, $\epsilon_t \sim \mathbf{WN}(\mathbf{0}, \Sigma^2)$,

$\Sigma^2 = \begin{bmatrix} 1/5 & 0 \\ 0 & 3/4 \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned} |\mathbf{A}(L)| &= |\mathbf{I} - \mathbf{B_1}L| \\ &= (1 - L/4)(1 - 5L/8) - L^2/8 \\ &= L^2/32 - 7L/8 + 1 \end{aligned}$$

Las soluciones de $|\mathbf{A}(L)| = 0$ son 1.194, 26.806 (las raíces características son $1/1.194 = 0.838$ y $1/26.806 = 0.037$), y entonces el modelo es estable y estacionario

Estabilidad VAR (cont.)

- *Ejemplo* (cont.). La estacionariedad implica que

$$
\begin{aligned}
E(\mathbf{y}_t) &= E(\mathbf{c}) + E(\mathbf{B_1}\mathbf{y}_{t-1}) + E(\epsilon_t) \\
&= \mathbf{c} + \mathbf{B_1} E(\mathbf{y}_t) \\
(\mathbf{I} - \mathbf{B_1}) E(\mathbf{y}_t) &= \mathbf{c} \\
E(\mathbf{y}_t) &= (\mathbf{I} - \mathbf{B_1})^{-1}\mathbf{c}
\end{aligned}
$$

Es decir,

$$
E(\mathbf{y}_t) = (\mathbf{I} - \mathbf{B_1})^{-1}\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 96/40 & 32/10 \\ 32/20 & 96/20 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/5 \\ 2/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.76 \\ 2.24 \end{bmatrix}
$$

Estabilidad VAR (cont.)

- *Ejemplo* (cont.). Utilizando que

$$E(\mathbf{y}_t) = (\mathbf{I} - \mathbf{B_1})^{-1}\mathbf{c} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{c} = (\mathbf{I} - \mathbf{B_1})E(\mathbf{y}_t)$$

se obtiene $Var(\mathbf{y}_t)$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}_t &= \mathbf{c} + \mathbf{B_1}\mathbf{y}_{t-1} + \epsilon_t \\
&= (\mathbf{I} - \mathbf{B_1})E(\mathbf{y}_t) + \mathbf{B_1}\mathbf{y}_{t-1} + \epsilon_t \\
\mathbf{y}_t - E(\mathbf{y}_t) &= \mathbf{B_1}(\mathbf{y}_{t-1} - E(\mathbf{y}_t)) + \epsilon_t \\
& \Downarrow \\
Var(\mathbf{y}_t) &= \begin{cases} b_{11}^2 Var(y_t) + 2b_{11}b_{12}Cov(y_t, z_t) + b_{12}^2 Var(z_t) + \sigma_y^2 \\ b_{21}^2 Var(y_t) + 2b_{21}b_{22}Cov(y_t, z_t) + b_{22}^2 Var(z_t) + \sigma_z^2 \end{cases}
\end{aligned}$$

Para calcular $Var(y_t)$ y $Var(z_t)$ necesitamos $Cov(y_t, z_t)$

Estabilidad VAR (cont.)

- *Ejemplo* (cont.). Tenemos que

$$\begin{aligned} y_t - E(y_t) &= b_{11}(y_{t-1} - E(y_t)) + b_{12}(z_{t-1} - E(z_t)) + \epsilon_{y,t} \\ z_t - E(z_t) &= b_{21}(y_{t-1} - E(y_t)) + b_{22}(z_{t-1} - E(z_t)) + \epsilon_{z,t} \end{aligned}$$

Eso implica que

$$\begin{aligned} [y_t - E(y_t)] \cdot [z_t - E(z_t)] = {} & [b_{11}(y_{t-1} - E(y_t)) + b_{12}(z_{t-1} - E(z_t)) + \epsilon_{y,t}] \cdot \\ & [b_{21}(y_{t-1} - E(y_t)) + b_{22}(z_{t-1} - E(z_t)) + \epsilon_{z,t}] \end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned} Cov(y_t, z_t) = {} & b_{11} b_{21} Var(y_t) + (b_{11} b_{22} + b_{12} b_{21}) Cov(y_t, z_t) \\ & + b_{12} b_{22} Var(z_t) + Cov(\epsilon_{y,t}, \epsilon_{z,t}) \end{aligned}$$

En resumen, 3 ecuaciones lineales con 3 incógnitas $Var(y_t)$, $Var(z_t)$ y $Cov(y_t, z_t)$

Estabilidad VAR (cont.)

- Para un modelo VAR(2) con $M = 2$ tenemos que

$$\mathbf{A}(L) = \mathbf{I} - \mathbf{B_1}L - \mathbf{B_2}L^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_{11}L & b_{12}L \\ b_{21}L & b_{22}L \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_{13}L^2 & b_{14}L^2 \\ b_{23}L^2 & b_{24}L^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 - b_{11}L - b_{13}L^2 & -b_{12}L - b_{14}L^2 \\ -b_{21}L - b_{23}L^2 & 1 - b_{22}L - b_{24}L^2 \end{bmatrix}$$

$$|\mathbf{A}(L)| = (1 - b_{11}L - b_{13}L^2)(1 - b_{22}L - b_{24}L^2) - (-b_{12}L - b_{14}L^2)(-b_{21}L - b_{23}L^2)$$

$$|\mathbf{A}(L)| = a + bL + cL^2 + dL^3 + eL^4$$

Estabilidad VAR (cont.)

- Encontrar soluciones de polinomios de orden 4 o más alto puede ser bastante difícil

- Afortunadamente existe un método alternativo que utiliza lo que se llama la *forma compañera* ("companion form") del modelo VAR(p)

- La forma compañera de $\mathbf{y}_t = \mathbf{B_1 y}_{t-1} + \cdots + \mathbf{B_1 y}_{t-p} + \epsilon_{\mathbf{t}}$ tiene la estructura de un modelo VAR(1) y se denota

$$\mathbf{Y}_t = \mathbf{A_1 Y}_{t-1} + \mathbf{E}_t$$

- Las soluciones del polinomio $|\mathbf{I}_{Mp} - \mathbf{A_1}(L)| = 0$ son las soluciones de $|\mathbf{I} - \mathbf{B_1}L - \cdots - \mathbf{B_p}L^p| = 0$

Estabilidad VAR (cont.)

- Donde
  - $\rightarrow$ $\mathbf{I}_{Mp}$ es una matriz identidad $Mp \times Mp$
  - $\rightarrow \mathbf{Y}_t = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_t \\ \mathbf{y}_{t-1} \\ \vdots \\ \mathbf{y}_{t-p+1} \end{bmatrix}$, $\mathbf{A_1} = \begin{bmatrix} \mathbf{B_1} & \mathbf{B_2} & \cdots & \mathbf{B_{p-1}} & \mathbf{B_p} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$
  - $\rightarrow \mathbf{E}_t = \begin{bmatrix} \epsilon_t \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$

Estabilidad VAR (cont.)

- Por ejemplo, la forma compañera de un modelo VAR(2) de dimensión 2 es

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y}_t \\ \mathbf{y}_{t-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B_1} & \mathbf{B_2} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{t-1} \\ \mathbf{y}_{t-2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \epsilon_t \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

o, más explícitamente,

$$\begin{bmatrix} y_{1,t} \\ y_{2,t} \\ y_{1,t-1} \\ y_{2,t-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{1,t-1} \\ y_{2,t-1} \\ y_{1,t-2} \\ y_{2,t-2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \epsilon_{1,t} \\ \epsilon_{2,t} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Estabilidad VAR (cont.)

- La forma compañera de un modelo VAR(3) de dimensión 2 es

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y}_t \\ \mathbf{y}_{t-1} \\ \mathbf{y}_{t-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B_1} & \mathbf{B_2} & \mathbf{B_3} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{t-1} \\ \mathbf{y}_{t-2} \\ \mathbf{y}_{t-3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \epsilon_t \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

o, más explícitamente,

$$\begin{bmatrix} y_{1,t} \\ y_{2,t} \\ y_{1,t-1} \\ y_{2,t-1} \\ y_{1,t-2} \\ y_{2,t-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{15} & b_{16} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} & b_{25} & b_{26} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{1,t-1} \\ y_{2,t-1} \\ y_{1,t-2} \\ y_{2,t-2} \\ y_{1,t-3} \\ y_{2,t-3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \epsilon_{1,t} \\ \epsilon_{2,t} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

El VAR como forma reducida

• El modelo VAR es de una forma *reducida* en el sentido de que no hay variables endógenas contemporáneas en el lado derecho

• Muchos modelos se formulan en forma *estructural* en el sentido de que una o más variables endógenas en el lado derecho son contemporáneas

• Por ejemplo, si Δc_t es el crecimiento en el consumo del hogar y Δi_t es el crecimiento en la renta del hogar, entonces se dice que el sistema

$$\begin{aligned} \Delta c_t &= b_{12.0}\Delta i_t + b_{11.1}\Delta c_{t-1} + b_{12.1}\Delta i_{t-1} + e_{c,t} \\ \Delta i_t &= b_{21.0}\Delta c_t + b_{21.1}\Delta c_{t-1} + b_{22.1}\Delta i_{t-1} + e_{i,t} \end{aligned} \tag{2}$$

es estructural

El VAR como forma reducida (cont.)

- El sistema (2) se puede escribir como

$$(\mathbf{I} - \mathbf{B_0}) \begin{bmatrix} \Delta c_t \\ \Delta i_t \end{bmatrix} = \mathbf{B_1} \begin{bmatrix} \Delta c_{t-1} \\ \Delta i_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_{c,t} \\ e_{i,t} \end{bmatrix} \tag{3}$$

donde $\mathbf{B_0} = \begin{bmatrix} 0 & b_{12.0} \\ b_{21.0} & 0 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{B_1} = \begin{bmatrix} b_{11.1} & b_{12.1} \\ b_{21.1} & b_{22.1} \end{bmatrix}$

- Si la inversa $(\mathbf{I} - \mathbf{B_0})^{-1}$ existe, entonces (3) se puede transformar a una forma reducida:

$$\begin{bmatrix} \Delta c_t \\ \Delta i_t \end{bmatrix} = (\mathbf{I} - \mathbf{B_0})^{-1}\mathbf{B_1} \begin{bmatrix} \Delta c_{t-1} \\ \Delta i_{t-1} \end{bmatrix} + (\mathbf{I} - \mathbf{B_0})^{-1} \begin{bmatrix} e_{c,t} \\ e_{i,t} \end{bmatrix} \tag{4}$$

El VAR como forma reducida (cont.)

• ¿Si estimamos (4) con MCO, podemos identificar los valores de los parámetros de (2)?

→ No, la estimación por MCO nos da un número infinito de soluciones, porque (2) tiene más parámetros que el número de parámetros estimados en (4)

• Solución: restricciones de identificación ("identifying restrictions") de los parámetros de (2)

• Algunas restricciones de identificación: descomposición de Choleski, descomposición de Sims-Bernanke, descomposición de Blanchard-Quah, etc.

El VAR como forma reducida (cont.)

- *Ejemplo*. Recordamos el modelo (2):

$$\Delta c_t = b_{12.0}\Delta i_t + b_{11.1}\Delta c_{t-1} + b_{12.1}\Delta i_{t-1} + e_{c,t}$$
$$\Delta i_t = b_{21.0}\Delta c_t + b_{21.1}\Delta c_{t-1} + b_{22.1}\Delta i_{t-1} + e_{i,t}$$
$$\Updownarrow$$
$$\mathbf{y}_t = \mathbf{B_0}\mathbf{y}_t + \mathbf{B_1}\mathbf{y}_{t-1} + \mathbf{e}_t$$

- Supongamos que estimamos la forma reducida

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{D_1}\mathbf{y}_{t-1} + \mathbf{u}_t$$

y que queremos identificar los valores de $\mathbf{B_0}$ y $\mathbf{B_1}$ (6 parámetros) con la estimación de $\mathbf{D_1}$ (4 parámetros)

El VAR como forma reducida (cont.)

• *Ejemplo* (cont.). Eso nos da 4 ecuaciones no-lineales con 6 incógnitas:

$$(\mathbf{I} - \mathbf{B_0})^{-1}\mathbf{B_1} = \mathbf{D_1}$$

• Como las ecuaciones son no-lineales, 2 restricciones no son necesariamente suficientes para la identificación. Por ejemplo, si hay razones (económicas, historicas, etc.) para que $b_{21.0}$ y $b_{21.1}$ sean iguales a cero—esto implicaría que el crecimiento del consumo no tiene impacto en el crecimiento del ingreso del hogar, entonces

$$\begin{bmatrix} b_{11.1} & b_{12.0}b_{22.1} + b_{12.1} \\ 0 & b_{22.1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11.1} & d_{12.1} \\ d_{21.1} & d_{22.1} \end{bmatrix}$$

• *Nota*: si estamos dispuestos a restringir la covarianza entre $e_{c,t}$ y $e_{i,t}$ y sus varianzas, entonces las estimaciones de la covarianza entre $u_{c,t}$ y $u_{i,t}$ y las estimaciones de sus varianzas pueden ayudarnos a identificar los parámetros de la forma estructural

Modelos PVAR

- Posiblemente una parte importante de los parámetros en el modelo VAR(p) son no significativos, y hipótesis sobre los parámetros de la forma estructural deberían ser contrastadas

- Esas son las motivaciones para modelos de típo "PVAR" ("Parsimonious VAR")

- Ejemplo del desarollo de un modelo PVAR:

  $\rightarrow$ 1. Transformar las variables para que sean $I(0)$

  $\rightarrow$ 2. Elegir p

  $\rightarrow$ 3. Estimar VAR en forma reducida o estructural con FIML

  $\rightarrow$ 4. Quitar los regresores no significativos/pruebas de restricciones sobre los parámetros

Modelos PVAR (cont.):

• **Definición: Causalidad Granger**. Se dice que una variable z_t causa otra variable y_t en el sentido Granger si uno o más de los retardos de z_t tienen impacto sobre y_t

• *Ejemplo*. Supongamos que $y_t \sim I(0), z_t \sim I(0)$, y consideramos el modelo

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 z_{t-1} + \cdots + \beta_p z_{t-p} + \epsilon_t, \quad \epsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$$

Si uno o más de los parámetros $\beta_1, \ldots, \beta_p$ son diferentes de cero, entonces se dice que z_t causa y_t en el sentido de Granger

Modelos PVAR (cont.):

• Un objetivo en el desarollo de un PVAR es el estudio de la causalidad Granger entre las variables

• En particular, si una variable no causa (en el sentido Granger) ninguna otra variable en un sistema VAR reducido, entonces podemos reducir la dimensionalidad del VAR quitando esta variable

Referencias:

Hamilton, J. D. (1994). *Time Series Analysis*. Princeton, New Jersey: Princeton University Press.

Patterson, K. (2000). *An Introduction to Applied Econometrics*. Hampshire: Palgrave.