MACROECONOMETRÍA

Tema 7: El modelo MCEq

Segundo Cuatrimestre (curso 2007/08), Depto. de Economía, UC3M

Profesor: Genaro Sucarrat

(Coordinador: Juan J. Dolado)

Introducción MMCEq:

• El estudio del modelo multivariante de corrección de equilibrio (MMCEq) es muy importante

• Posiblemente, MMCEq es el modelo más útil (y utilizado) para economía política y predicción condicional hasta 5 años

• Ventajas principales del MMCEq: permite la modelización (multiecuacional) conjunta de relaciones de equilibrio y "dínamica de corto plazo", y técnicamente no es muy complejo

• El MMCEq también se denomina modelo multivariante de corrección de error ("MMCE")

• En inglés: "vector equilibrium correction model" (VEqCM) o "vector error correction model" (VECM)

Introducción MMCEq (cont.):

• **Definición: el MMCEq**. Dado que $\mathbf{y}_t \sim I(1)$, el MMCEq tiene la forma

$$\Delta \mathbf{y}_t = \mathbf{B_0}\Delta \mathbf{y}_t + \mathbf{B_1}\Delta \mathbf{y}_{t-1} + \cdots + \mathbf{B_p}\Delta \mathbf{y}_{t-p} + \theta\alpha' \mathbf{y}_{t-1} + \mathbf{C}\mathbf{x}_t + \epsilon_t$$

con $Cov(\epsilon_t, \epsilon_{t-j}) = \mathbf{0}$ para todo $j \neq 0$. $\mathbf{y}_t{}' = [y_{1,t}, \ldots, y_{M,t}]$ es el vector de variables endógenas, α es la matriz $M \times r$ de parámetros de cointegración (r relaciones de cointegración), θ es la matriz $M \times r$ de parámetros de ajuste, $\mathbf{x}_t{}' = [x_{1,t}, \ldots, x_{K,t}]$ es el vector de variables exógenas (incluída la constante), $\mathbf{B_0}, \mathbf{B}_1, \ldots, \mathbf{B}_p$ son matrices $M \times M$ de parámetros, y $\mathbf{C}$ es la matriz $M \times K$ de parámetros asociada a las variables exógenas

• *Nota*: por lo menos un parámetro de ajuste en la matriz θ debe ser distinto de cero

• *Nota*: el MMCEq se puede representar como un modelo VAR no-estacionario

Introducción MMCEq (cont.):

• Como en el modelo VAR se suele hacer una distinción entre MMCEq estructurales y MMCEq reducidos:

$\rightarrow$ El MMCEq reducido: $\mathbf{B_0} = \mathbf{0}$

$\rightarrow$ El MMCEq estructural: $\mathbf{B_0} \neq \mathbf{0}$

• Parámetros de corto plazo: $\mathbf{B_0}, \mathbf{B}_1, \ldots, \mathbf{B}_p$ y θ

• Parámetros de largo plazo: α

Introducción MMCEq (cont.):

• *Ejemplo*. Un MMCEq reducido donde $\mathbf{y}_t{}' = [y_t, z_t] \sim I(1)$ y con una relación de cointegración:

$$\mathbf{B_1} = \left[\begin{array}{cc} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{array} \right], \theta = \left[\begin{array}{c} \theta_1 \\ \theta_2 \end{array} \right], \alpha = \left[\begin{array}{c} 1 \\ \alpha_2 \end{array} \right]$$

Es decir,

$$\Delta y_t = b_{11} \Delta y_{t-1} + b_{12} \Delta z_{t-1} + \theta_1 (y_{t-1} + \alpha_2 z_{t-1}) + \epsilon_{1,t}$$
$$\Delta z_t = b_{21} \Delta y_{t-1} + b_{22} \Delta z_{t-1} + \theta_2 (y_{t-1} + \alpha_2 z_{t-1}) + \epsilon_{2,t}$$

Introducción MMCEq (cont.):

• *Ejemplo*. Otro MMCEq donde $\mathbf{y}_t{}' = [y_t, z_t] \sim I(1)$ y con una relación de cointegración:

$$\mathbf{B_1} = \begin{bmatrix} b_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \theta = \begin{bmatrix} 0 \\ \theta_2 \end{bmatrix}, \alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}$$

Es decir,

$$\Delta y_t = b_{11} \Delta y_{t-1} + \epsilon_{1,t}$$

$$\Delta z_t = \theta_2 (y_{t-1} + \alpha_2 z_{t-1}) + \epsilon_{2,t}$$

Introducción MMCEq (cont.):

- *Ejemplo*. Un MMCEq donde $\mathbf{y}_t{}' = [x_t, y_t, z_t] \sim I(1)$ y con dos relaciones de cointegración:

$$\mathbf{B_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_{22.1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B_4} = \begin{bmatrix} b_{11.4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{33.4} \end{bmatrix}$$

$$\theta = \begin{bmatrix} \theta_{11} & \theta_{12} \\ \theta_{21} & \theta_{22} \\ \theta_{31} & \theta_{32} \end{bmatrix}, \alpha = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} \end{bmatrix}$$

Es decir,

$$\Delta x_t = b_{11.4}\Delta x_{t-4} + \theta_{11}u_{1,t-1} + \theta_{12}u_{2,t-1} + \epsilon_{1,t}$$

$$\Delta y_t = b_{22.1}\Delta y_{t-1} + \theta_{21}u_{1,t-1} + \theta_{22}u_{2,t-1} + \epsilon_{2,t}$$

$$\Delta z_t = b_{33.4}\Delta z_{t-4} + \theta_{31}u_{1,t-1} + \theta_{32}u_{2,t-1} + \epsilon_{3,t}$$

$$u_{1,t-1} = x_{t-1} + \alpha_{21}y_{t-1} + \alpha_{31}z_{t-1}$$

$$u_{2,t-1} = x_{t-1} + \alpha_{22}y_{t-1} + \alpha_{32}z_{t-1}$$

Introducción MMCEq (cont.):

• *Ejemplo*. Otro MMCEq donde $\mathbf{y}_t{}' = [x_t, y_t, z_t] \sim I(1)$ y con dos relaciones de cointegración:

$$\mathbf{B_1} = \begin{bmatrix} b_{11.1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \theta = \begin{bmatrix} \theta_{11} & 0 \\ 0 & \theta_{22} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \alpha_{21} & 1 \\ 0 & \alpha_{32} \end{bmatrix}$$

Es decir,

$$\Delta x_t = b_{11.1}\Delta x_{t-1} + \theta_{11} u_{1,t-1} + \epsilon_{1,t}$$

$$\Delta y_t = \theta_{22} u_{2,t-1} + \epsilon_{2,t}$$

$$\Delta z_t = \epsilon_{3,t}$$

$$u_{1,t-1} = x_{t-1} + \alpha_{21} y_{t-1}$$

$$u_{2,t-1} = y_{t-1} + \alpha_{32} z_{t-1}$$

Múltiples relaciones:

• Recordamos: el rango de una matriz cuadrada Π es igual al número de raíces características de la matriz distintas de cero

• Propiedad importante de la matriz $\theta\alpha'$: si $\mathbf{y}_t \sim I(1)$, entonces el rango ($< M$) de $\theta\alpha'$ es el número de relaciones de cointegración

• En resumen:

$$\mathbf{y}_t \sim I(0): \qquad r = M$$
$$\mathbf{y}_t \sim I(1): \qquad 0 \leq r < M$$

• *Nota*: el rango r es igual a cero solamente si $\theta\alpha' = \mathbf{0}$

• El método de Johansen (1995) consiste en: primero estimar $\theta\alpha'$, y después hacer contrastes sobre el número de raíces características distintas de cero utilizando el método de Máxima Verosimilitud

Múltiples relaciones (cont.):

• *Ejemplo*. Un MMCEq sencillo donde $\mathbf{y}'_t \sim I(1)$ y con una relación de cointegración:

$$\Delta x_t = \tfrac{1}{2}(x_{t-1} - \tfrac{1}{3}z_{t-1}) + \epsilon_{1t}$$
$$\Delta z_t = \tfrac{1}{4}(x_{t-1} - \tfrac{1}{3}z_{t-1}) + \epsilon_{2t}$$

Es decir,

$$\mathbf{B}(L) = \mathbf{0}, \theta = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}, \alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix}, \Pi = \theta\alpha' = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{12} \end{bmatrix}.$$

Múltiples relaciones (cont.):

• *Ejemplo* (cont.). ¿Cuáles son las raíces características de Π?

$$|\Pi - r\mathbf{I}| = 0 : \qquad r_1 = \frac{5}{12}, r_2 = 0$$

Y entonces el rango de Π es 1

• Más generalmente, para una matriz 2×2 $\Pi = \theta\alpha'$ con una relación de cointegración:

$$|\Pi - r\mathbf{I}| = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$r[r - (\theta_1 + \theta_2\alpha_{21})] = 0, \qquad r_1 = \theta_1 + \theta_2\alpha_{21}, \qquad r_2 = 0$$

Múltiples relaciones (cont.):

- *Ejemplo*. Estimaciones de un MMCEq donde $\mathbf{y'}_t \sim I(1)$:

$$\Delta x_t = -\tfrac{1}{3}x_{t-1} + \tfrac{1}{6}z_{t-1} + \epsilon_{1t}$$
$$\Delta z_t = -\tfrac{1}{2}x_{t-1} + \tfrac{1}{4}z_{t-1} + \epsilon_{2t}$$

Cuantas raíces características tiene Π?

$$|\Pi - r\mathbf{I}| = 0 \quad \Rightarrow \quad r_1 = -\frac{1}{12}, r_2 = 0$$

Entonces el rango de Π es 1, y los valores de θ y α son

$$\theta = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad \alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Identificación:

• Supongamos que hemos estimado Π, es decir, que tenemos $M \times M$ estimaciones

• En θ hay $M \times r$ parámetros y en α hay $(M-1) \times r$ parámetros

• Si $M \geq 3$ entonces no estamos asegurados de que podemos identificar los valores de θ y α

• Por ejemplo, con $M = 3$ y $r = 2$ no podemos identificar todos los parámetros en θ y α

• *Solución*: restricciones de identificación

$\rightarrow$ restricciones de exclusion (por ejemplo $\alpha_{21} = 0$, etc.)

$\rightarrow$ restricciones de igualdad (por ejemplo $\alpha_{21} = -\alpha_{31}$, etc.)

Identificación (cont.):

• *Ejemplo*. Supongamos que $\mathbf{y'}_t \sim I(1)$, que $M = 3$, y que estimamos $\Delta \mathbf{y}_t = \theta\alpha' \mathbf{y}_{t-1} + \epsilon_t$. Eso no da una matriz 3×3, $\hat{\Pi}$, de estimaciones, y supongamos ademas que un análisis de cointegración sugiere que hay 2 relaciones de cointegración. Eso nos da 9 ecuaciones en 10 incognitas:

$$\begin{bmatrix} \hat{\hat{\pi}}_{11} & \hat{\pi}_{12} & \hat{\pi}_{13} \\ \hat{\pi}_{21} & \hat{\pi}_{22} & \hat{\pi}_{23} \\ \hat{\pi}_{31} & \hat{\pi}_{32} & \hat{\pi}_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_{11} + \theta_{12} & \theta_{11}\alpha_{21} + \theta_{12}\alpha_{22} & \theta_{11}\alpha_{31} + \theta_{12}\alpha_{32} \\ \theta_{21} + \theta_{22} & \theta_{21}\alpha_{21} + \theta_{22}\alpha_{22} & \theta_{21}\alpha_{31} + \theta_{22}\alpha_{32} \\ \theta_{31} + \theta_{32} & \theta_{31}\alpha_{21} + \theta_{32}\alpha_{22} & \theta_{31}\alpha_{31} + \theta_{32}\alpha_{32} \end{bmatrix}$$

• Supongamos que, por razones económicas o análisis estadística (mejor ambos), $\alpha_{21} = 0$

$\rightarrow$ esto nos ayuda identificar los parámetros

Identificación (cont.):

• Dado que $\mathbf{y'}_t \sim I(1)$, el método de Johansen (1988,1995) consiste en:

1. Especificar un VAR(p) reducido de $\mathbf{y}_t$ con, idealmente, $\epsilon_t \sim IN(0, \Sigma^2)$

2. Despues haber elegido p, estimar la representación MMCEq del VAR(p) con MV

3. Contrastar el rango de Π

4. Contrastar y identificar θ y α

Exogeneidad:

• Intuitivamente una variable es exógena si está determinada fuera del sistema de ecuaciones

• En el MMCEq se suele hacer una distinción entre tres tipos de exogeneidad:

1. Exogeneidad débil
2. Exogeneidad fuerte
3. Super exogeneidad

• Idealmente las variables exógenas deberían ser exógenas en los tres sentidos

• *Nota*: una variable tiene que ser exógena débil para ser exógena fuerte o super exógena

Exogeneidad (cont.):

• La exogeneidad débil es un concepto de la "teoría probabilistica de reducción" (Hendry 1995, capitulo 9), y hace referencia a una relacion entre variables y parámetros

• En el MMCEq tenemos una definición/implementación más sencilla

• **Definición: exogeneidad débil en un MMCEq con $\mathbf{y}_t \sim I(1)$.** Se dice que una variable $y_{m,t} \in \mathbf{y}_t$ es exógena débil si todos los parámetros de ajuste en la ecuación de $\Delta y_{m,t}$ son iguales a cero

• Dicho de otra manera, un contraste para determinar si $y_{m,t}$ es exógena débil consiste en contrastar si las desviaciónes de los equilibrios retardados tienen un efecto en $\Delta y_{m,t}$ o no

Exogeneidad (cont.):

• La exogeneidad fuerte es una propiedad deseable para la economía política y para la predicción condicional

• **Definición: exogeneidad fuerte**. Dado un MMCEq con variables $\mathbf{y}_t \sim I(1)$, se dice que una variable $y_{m,t}$ exógena débil es exógena fuerte si las otras variables $\Delta y_{1,t}, \ldots, \Delta y_{m-1,t}, \Delta y_{m+1,t}, \ldots, \Delta y_{M,t}$ no tienen un efecto en $\Delta y_{m,t}$, ni contemporáneo ni retardado

• *Ejemplo*: un MMCEq de $\mathbf{y'}_t = [y_t, z_t] \sim I(1)$

$$\Delta y_t = 1,3 + 0,6\Delta z_t + 0,4\Delta y_{t-1} - 0,1u_{t-1} + \epsilon_{1,t}$$

$$\Delta z_t = 1,9 + 0,4\Delta z_{t-1} + \epsilon_{2,t}$$

y_t no es exógena, z_t es exógena en sentido fuerte

• Consecuencia: para estudiar la evolución en y_t, no necesitamos estudiar su impacto en z_t

Exogeneidad (cont.):

- Super exogeneidad es una propiedad deseable para economía política válida

- Crítica de Lucas (1976): los parámetros dependen de la política del gobierno, entonces no se pueden utilizar modelos econométricos para analizar los efectos de un cambio de política

- **Definición: super exogeneidad**. Se dice que una variable exógena débil es super exógena si los parámetros no dependen de los valores de dicha variable

- Dicho de otra manera, un contraste de super exogeneidad consiste en contrastar si los valores de los parámetros de interés dependen de la política

- Lucas (1976) y otros propusieron una solución más ambiciosa—y muy optimista—a la posibilidad de que los parámetros dependan de la política: microfundamentos

Referencias:

Hendry, D. F. (1995). *Dynamic Econometrics*. Oxford: Oxford University Press.

Johansen, S. (1988). Statistical Analysis of Cointegration Vectors. *Journal of Economic Dynamics and Control 12, 231–254.*

Johansen, S. (1995). Likelihood-Based Inference in Cointegrated Vector Autoregressive Models. *Oxford: Oxford University Press.*

Lucas, R. E. (1976). Econometric Policy Evaluation: A Critique. In K. Brunner and A. Meltzer (Eds.), The Phillips Curve and the Labor Market. *Amsterdam: North-Holland.*